Übungen zur Vorlesung „Differentialgeometrie II“ im Wintersemester 2009/10 bei Prof. V. Bangert

Blatt 01 20. 10. 2009

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe auf Ihr Blatt.

1. Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ eine reguläre Funktion, d.h. $df(p) \neq 0$ für alle $p \in M$.

   (a) Sei $V := \frac{1}{\|\operatorname{grad} f\|} \operatorname{grad} f$. Zeigen Sie, dass jede Flusslinie von V nach Bogenlänge parametrisiert ist.

   (b) Sei $X := \frac{1}{\|\operatorname{grad} f\|^2} \operatorname{grad} f$ und $\gamma : (\alpha, \omega) \to M$ eine maximale Integralkurve von X. Zeigen Sie, dass

   $$(f \circ \gamma)(t_0 + t) = (f \circ \gamma)(t_0) + t \qquad \text{für } t_0, t_0 + t \in (\alpha, \omega).$$

2. Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, $f : M \to \mathbb{R}$ glatt, $df(p) = 0$ für einen Punkt $p \in M$ und $\varphi : U \subseteq M \to V \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Karte um $p \in U$. Die *zweite Ableitung von f am Punkt $p \in M$ bezüglich φ* ist gegeben durch

   $$D^2 f(p)(v, w) := \sum \partial^\varphi_{i|p} \partial^\varphi_{j|p}(f) v^i w^j \qquad \text{für } v, w \in T_pM.$$

   Zeigen Sie: $D^2 f(p)$ ist unabhängig von der Wahl einer Karte definiert.

   Bemerkung: Ist f am Punkt p regulär, so ist die obige Definition der zweiten Ableitung nicht koordinatenunabhängig.

3. Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und ∇ ein symmetrischer (= torsionsfreier) linearer Zusammenhang auf $TM \to M$. So ist durch folgende Definition ein Zusammenhang auf $T^*M \to M$ gegeben (vgl. DGII, Blatt4, Aufg.3):

   $$(\nabla_X \omega)(Y) := X(\omega(Y)) - \omega(\nabla_X Y),$$

   wobei $X, Y \in \Gamma(TM)$ beliebige Vektorfelder und $\omega \in \Gamma(T^*M)$ eine 1-Form seien.

   Die Hesseform von f am Punkt $p \in M$ bezüglich ∇ wird definiert durch

   $$\nabla^2 f|_p(v, w) := (\nabla_X(df))(Y)|_p,$$

   wobei $v, w \in T_pM$ und $X, Y \in \Gamma(TM)$ beliebige Vektorfelder mit der Eigenschaft $X|_p = v$ und $Y|_p = w$.

   (a) Zeigen Sie: $\nabla^2 f|_p$ ist eine wohldefinierte, symmetrische Bilinearform.

   Ist $\tilde{\nabla}$ ein weiterer symmetrischer linearer Zusammenhang, so ist die Differenz $A(X, Y) := \nabla_X Y - \tilde{\nabla}_X Y$ ein (1,2)-Tensor.

   (b) Zeigen Sie, dass A symmetrisch ist.

(c) Zeigen Sie, dass
$$\tilde{\nabla}^2 f(v,w) = \nabla^2 f(v,w) + A(v,w)(f).$$
Und schließen Sie daraus, dass die Hesseform unabhängig vom Zusammenhang definiert ist, falls $df(p) = 0$.

4. Sei (M, g) eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit und $f : M \to \mathbb{R}$ eine C^∞-Funktion und $a < b$, so dass für ein $\varepsilon > 0$ gilt
$$\|\operatorname{grad} f|_p\| \geq \varepsilon \qquad \text{für alle } p \in f^{-1}([a,b]).$$
Zeigen Sie, dass in dieser Situation die Behauptung von Satz (1.1) gilt.

Abgabe: Dienstag, 27. 10. 09 vor der Vorlesung