Übungen zur Vorlesung „Riemannsche Geometrie und Variationsrechnung“ im Wintersemester 2009/10 bei Prof. V. Bangert

Blatt 02 27. 10. 2009

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe auf Ihr Blatt.

1. Sei $f : M \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion, $p \in M$ und $df(p) \neq 0$. Dann existiert eine Karte φ um p, so dass
$$(f \circ \varphi^{-1})(x_1, \ldots, x_m) = x_1$$
gilt.

2. *Mountain-Pass-Lemma* Sei M zusammenhängende, kompakte Mannigfaltigkeit, $f : M \to \mathbb{R}$ Morsefunktion und $p_0 \neq p_1$ kritische Punkte von f, die lokale Minima von f sind.

   Zeigen Sie: Es existiert ein (weiterer) kritischer Punkt q von f mit Index 1 und so dass
$$f(q) > \max\{f(p_0), f(p_1)\}.$$

   Anleitung: Betrachten Sie
$$c := \inf\{\ \tilde{c} \mid p_0, p_1 \text{ liegen in derselben Zusammenhangskomponente von } f^{-1}((-\infty, \tilde{c}))\}$$
   und zeigen Sie $c > \max\{f(p_0), f(p_1)\}$. Überlegen Sie sich, dass unter den Bedingungen von Satz (1.1) die Menge $f^{-1}((-\infty, a])$ Deformationsretrakt von $f^{-1}((-\infty, b])$ ist. Folgern Sie daraus, dass ein kritischer Punkt q von f mit $f(q) = c$ existiert. Nutzen Sie dann das Morselemma, um zu zeigen, dass $f^{-1}(c)$ auch einen kritischen Punkt vom Index 1 enthält.

3. Sind X_1, X_2 topologische Räume und $F_i : D^n \to X_i$, $i = 1, 2$ Homöomorphismen, wobei $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \| x| \leq 1\}$ den abgeschlossenen n-Ball bezeichnet. Der Rand von X_i, $i = 1, 2$, ist gegeben durch $\partial X_i = F_i(S^{n-1})$, $i = 1, 2$.

   Zeigen Sie: Jeder Homöomorphismus $h : \partial X_1 \to \partial X_2$ kann zu einem Homöomorphismus $H : X_1 \to X_2$ fortgesetzt werden.

4. Sei M kompakte Mannigfaltigkeit, $X \in \Gamma(TM)$ Vektorfeld auf M und $\varphi : M \times \mathbb{R} \to M$ der Fluss von X. Die $\alpha-$ (bzw. $\omega-$)Limesmenge eines Punktes $p \in M$ (bzgl. X) ist definiert durch
$$L_\alpha(p) = \{q| \text{ es existiert eine Folge } t_i \to -\infty : \quad \lim_{i\to\infty} \varphi(p, t_i) = q\},$$
$$L_\omega(p) = \{q| \text{ es existiert eine Folge } t_i \to \infty : \quad \lim_{i\to\infty} \varphi(p, t_i) = q\}.$$

   Zeigen Sie:

   (a) $L_\alpha(p)$ und $L_\omega(p)$ sind nichtleere, kompakte, zusammenhängende Mengen, die invariant unter dem Fluss φ sind (d.h. $\varphi_t(L_\alpha(p)) = L_\alpha(p)$, $\varphi_t(L_\omega(p)) = L_\omega(p)$ für alle $t \in \mathbb{R}$).

(b) Ist M mit einer Riemannschen Metrik versehen und ist $X = \operatorname{grad} f$ für eine Funktion $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$, die nur isolierte kritische Punkte besitzt, so besteht $L_\alpha(p)$ bzw. $L_\omega(p)$ für jedes $p \in M$ aus genau einem kritischen Punkt von f. Falls $L_\alpha(p) = q$, so gilt $\lim_{t\to-\infty} \varphi(p,t) = q$, und falls $L_\omega(p) = q$, so gilt $\lim_{t\to+\infty} \varphi(p,t) = q$.

Abgabe: Dienstag, 03. 11. vor der Vorlesung