Übungen zur Vorlesung „Riemannsche Geometrie und Variationsrechnung“ im Wintersemester 2009/10 bei Prof. V. Bangert

Blatt 03 — 03. 11. 2009

Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf Ihr Blatt.

1. Sei M kompakte Mannigfaltigkeit ungerader Dimension. Dann gilt

$$\chi(M) = 0.$$

   Anleitung: Betrachte zu einer Morsefunktion $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ die Funktion $-f$.

2. Sei $f \in C^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ und 0 ein nicht ausgearteter kritischer Punkt von f mit Index $k := \operatorname{ind}(f, 0)$. Sei weiterhin $\varphi : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ der Fluss von $X := -\operatorname{grad}(f)$. Die *stabile Mannigfaltigkeit von* 0 wird definiert durch

$$W^s(0) := \{x \in \mathbb{R}^m | \lim_{t\to\infty} \varphi^t(x) = 0\}$$

   und die *instabile Mannigfaltigkeit von* 0 wird definiert durch

$$W^u(0) := \{x \in \mathbb{R}^m | \lim_{t\to-\infty} \varphi^t(x) = 0\}.$$

   Zeigen Sie: $W^s(0)$ ist $(m-k)$-dimensionale, $W^u(0)$ ist k-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^m$.

3. Seien $0 < \lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_m$ reelle Zahlen und $f : \mathbb{R}P^m \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f([x_0 : x_1 : \ldots : x_m]) = \frac{\sum_{i=0}^m \lambda_i x_i^2}{\sum_{i=0}^m x_i^2}.$$

   Zeigen Sie: f ist Morsefunktion auf $\mathbb{R}P^m$, die zu jedem $0 \leq k \leq m$ genau einen kritischen Punkt mit Index k besitzt. Jede andere Morsefunktion auf $\mathbb{R}P^m$ besitzt mindestens einen kritischen Punkt mit Index k, $0 \leq k \leq m$. Berechnen Sie die Eulercharakteristik von $\mathbb{R}P^m$.

4. Seien $0 < \lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_n$ reelle Zahlen und $f : \mathbb{C}P^n \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f([z_0 : \ldots : z_n]) = \frac{\sum_{i=0}^n \lambda_i |z_i|^2}{\sum_{i=0}^n |z_i|^2}.$$

   Zeigen Sie: f ist Morsefunktion, deren kritische Punkte alle geraden Index haben und zwar so, dass zu jedem geraden $0 \leq k \leq 2n$ genau ein kritischer Punkt vom Index k gehört.

Abgabe: Dienstag, 10. 11. vor der Vorlesung