Übungen zur Vorlesung „Riemannsche Geometrie und Variationsrechnung“ im Wintersemester 2009/10 bei Prof. V. Bangert

Blatt 04 10.11. 2009

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe auf Ihr Blatt.

1. (a) Seien (X,Y), (X',Y') topologische Paare. Zwei Abbildungen $f, \overline{f} : (X,Y) \to (X',Y')$ sind *homotop als Abbildungen von Paaren*, wenn eine Homotopie $h : X \times [0,1] \to X'$ zwischen f und $\overline{f}$ existiert, so dass $h_t(Y) \subseteq Y'$ für alle $t \in [0,1]$.

   (X,Y), (X',Y') heißen *homotopieäquivalent*, wenn es stetige Abbildungen von Paaren $f : (X,Y) \to (X',Y')$ und $g : (X',Y') \to (X,Y)$ gibt, die *homotopieinvers* zueinander sind, d.h. $g \circ f$ ist homotop (als Abbildung von Paaren) zu $\mathrm{id}_{(X,Y)}$ und $f \circ g$ ist homotop zu $\mathrm{id}_{(X',Y')}$.

   Zeigen Sie: Homotopieinverse Abbildungen f und g induzieren Isomorphismen der relativen Homologiemoduln.

   Speziell: Sind $(X,Y) \sim (X',Y')$ homotopieäquivalent, so sind $H_j(X,Y;R) \simeq H_j(X',Y';R)$ isomorph für alle $j \geq 0$.

   Anleitung: Benutzen Sie die Homotopieinvarianz der Homologiefunktoren H_j.

   (b) Seien (X,Y), (X',Y') topologische Paare mit $X' \subseteq X$, $Y' \subseteq Y$ und $f : (X,Y) \to (X,Y)$ eine stetige Abbildung, die homotop zu $\mathrm{id}_{(X,Y)}$ ist, so dass folgende Eigenschaften gelten:

   i. $f(X) \subseteq X'$
   ii. $f(Y) \subseteq Y'$
   iii. $f|_{X'} = \mathrm{id}_{X'}$.

   Zeigen Sie: Die topologischen Paare (X,Y) und (X',Y') sind homotopieäquivalent.

   Anleitung: Betrachten Sie die Inklusion $i : (X',Y') \to (X,Y)$ und die Abbildung $\tilde{f} : (X,Y) \to (X',Y')$, die durch $\tilde{f}(x) = f(x)$ für alle $x \in X$ definiert ist. (f und $\tilde{f}$ unterscheiden sich nur durch die Zielmenge.) Zeigen Sie dann, dass i und $\tilde{f}$ homotopieinvers zueinander sind.

   (c) Sei M Mannigfaltigkeit, $f \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ und p ein nicht ausgearteter kritischer Punkt von f, $\mathrm{ind}(f,p) =: k$.

   Zeigen Sie: Für alle $j \geq 0$ gilt:

$$C_j(f,p) \simeq \begin{cases} 0 & j \neq k \\ R & j = k. \end{cases}$$

   Anleitung: Benutzen Sie eine Morsekarte $\varphi : U \to D^k \times D^{m-k}$ um p, also $\tilde{f}(x,y) = f \circ \varphi^{-1}(x,y) = -|x|^2 + |y|^2$ für $(x,y) \in D^k \times D^{m-k}$ (oE. $f(p) = 0$). Wenden Sie dann Aufgabenteil 1b) auf $X := \{(x,y) | |x| \geq |y|\}$, $Y := X \setminus \{0\}$, $X' := D^k \times \{0\}$, $Y' := (D^k \setminus \{0\}) \times \{0\}$ und die Abbildung $f : (X,Y) \to (X,Y)$, $(x,y) \mapsto (x,0)$ an. Verwenden Sie dann, dass

$$H_j(D^k, D^k \setminus \{0\}; R) = \begin{cases} 0 & j \neq k \\ R & j = k \end{cases}$$

gilt.

2. Sei $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ und $0 \in \mathbb{R}$ ein isolierter kritischer Punkt von f, der weder ein lokales Minimum noch ein lokales Maximum von f ist. Dann gilt für alle $j \geq 0$:

$$C_j(f, 0) = \{0\}.$$

3. Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(z) = \mathrm{Re}(z^n) \qquad \text{für ein } n \in \mathbb{N}_{>0}.$$

Berechnen Sie die kritischen Moduln $C_j(f, 0; R)$ von f in 0 für alle $j \geq 0$, wobei R ein beliebiger Körper sei.

4. Sei M eine m-dimensionale Mannigfaltigkeit und $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ eine Morsefunktion auf M.

Zeigen Sie: Die Morseungleichungen (Satz (1.15)) lassen sich äquivalent formulieren durch folgende Aussage: Es existiert ein Polynom $(m-1)-$ten Grades $Q(t)$ mit nichtnegativen Koeffizienten, so dass

$$\sum_{k=0}^{m} \nu_k t^k = \sum_{k=0}^{m} \beta_k t^k + (1 + t)Q(t)$$

gilt.

Abgabe: Dienstag, 17. 11. vor der Vorlesung