Übungen zur Vorlesung „Riemannsche Geometrie und Variationsrechnung“ im Wintersemester 2009/10 bei Prof. V. Bangert

Blatt 05 17.11. 2009

Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf Ihr Blatt.

1. Sei (M, g) Riemannsche Mannigfaltigkeit.

   Eine C^∞-Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ erfüllt die *Palais-Smale-Bedingung*, falls jede Folge $\{x_j\}$ in M, für die gilt, dass $\lim_{j\to\infty} f(x_j)$ existiert und $\lim_{j\to\infty} |\operatorname{grad} f(x_j)| = 0$, eine konvergente Teilfolge besitzt.

   Sei nun $f : M \to \mathbb{R}$ eine C^∞-Funktion, die die Palais-Smale-Bedingung erfüllt, $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ und $f^{-1}([a, b])$ enthalte keine kritischen Punkte. Zeigen Sie: In dieser Situation gilt die Behauptung von Satz (1.1).

2. Sei (M, g) Riemannsche Mannigfaltigkeit, $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$, p isolierter kritischer Punkt von f, $f(p) = c$ und U offene Umgebung um p, so dass $K_f \cap U = \{p\}$.

   Zeigen Sie: Es existiert eine offene Menge $p \in V \subseteq U$ und ein $\varepsilon > 0$, so dass

   (a) $M^c \cap V$ Deformationsretrakt von $M^{c+\varepsilon} \cap V$ ist und

   (b) $M^{c-\varepsilon} \cap V$ Deformationsretrakt von $(M^c \cap V) \setminus \{p\}$ ist.

   Anleitung: Zeigen Sie, dass eine offene Umgebung $p \in V \subseteq U$ existiert, so dass folgende Eigenschaften gelten:

   (a) Ist φ der lokale Fluss von $-\frac{1}{|\operatorname{grad}(f)|^2} \operatorname{grad}(f)$ auf $M \setminus K_f$, so gilt:

   $$\text{für alle } q \in V \text{ und } t \in (0, \omega_q) : \varphi_t(q) \in V \cup M^{c-\varepsilon}.$$

   (b) Es existiert eine Homotopie $h : (M^{c+\varepsilon} \cap V) \times [0, 1] \to M^{c+\varepsilon} \cap V$ mit folgenden Eigenschaften

      i. $h_0 = \mathrm{id}_{(M^{c+\varepsilon}\cap V)}$ und $h_1((M^{c+\varepsilon} \cap V)) \subseteq M^c \cap V$

      ii. $h_t|_{(M^c\cap V)} = \mathrm{id}_{(M^c\cap V)}$ für alle $t \in [0, 1]$

   (c) Es existiert eine Homotopie $h : (M^c \cap V) \times [0, 1] \to M^c \cap V$ mit folgenden Eigenschaften

      i. $h_0 = \mathrm{id}_{(M^c\cap V)}$ und $h_1((M^c \cap V)) \subseteq M^{c-\varepsilon} \cap V$

      ii. $h_t|_{(M^{c-\varepsilon}\cap V)} = \mathrm{id}_{(M^{c-\varepsilon}\cap V)}$ für alle $t \in [0, 1]$

3. Sei $X = U \,\dot\cup\, V$ disjunkte Vereinigung zweier offener Mengen U und V.

   Zeigen Sie: $H_q(X) \simeq H_q(U) \oplus H_q(V)$ für alle $q \geq 0$.

   Anleitung: Theorem 13.2 in “Foundations Of Algebraic Topology” von Eilenberg und Steenrod stellt eine Verallgemeinerung der obigen Aussage dar. Lesen Sie Kapitel 13 dieses Buches und übertragen Sie den dort vorgestellten Beweis auf den hier beschriebenen Fall.

Abgabe: Dienstag, 24.11. vor der Vorlesung