Übungen zur Vorlesung „Riemannsche Geometrie und Variationsrechnung“ im Wintersemester 2009/10 bei Prof. V. Bangert

Blatt 06 — 24. 11. 2009

Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf Ihr Blatt.

1. Sei M eine Mannigfaltigkeit, $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ und p isolierter kritischer Punkt von f.

   Zeigen Sie: Ist $C_0(f, p) \neq \{0\}$, so ist p ein lokales Minimum von f.

2. Sei M Mannigfaltigkeit, $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$, p isolierter kritischer Punkt von f mit Index $k = \operatorname{ind}(f, p)$, l die Nullität von $D^2 f|_p$ und $N = N_\Phi$ eine charakteristiche Mannigfaltigkeit für f in p.

   (a) Zeigen Sie: Ist p ein lokales Minimum von $f|_N$, so ist

   $$C_j(f,p) = \begin{cases} 0 & \text{, falls } j \neq k \\ R & \text{, falls } j = k \end{cases} .$$

   (b) Zeigen Sie: Ist p ein lokales Maximum von $f|_N$, so ist

   $$C_j(f,p) = \begin{cases} 0 & \text{, falls } j \neq k+l \\ R & \text{, falls } j = k+l \end{cases} .$$

   (c) Zeigen Sie: Ist p kein lokales Minimum von $f|_N$, so gilt

   $$C_j(f,p) = 0, \text{ falls } j \leq k.$$

3. Sei (M, g) Riemannsche Mannigfaltigkeit, $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ und p isolierter kritischer Punkt von f. Sei $P \subseteq M$ eine Untermannigfaltigkeit, so dass der Nullraum von $D^2 f|_p$ in $T_p P$ enthalten ist und $\operatorname{grad} f|_q \in T_q P$ für alle $q \in P$. Sei $N \subseteq P$ eine charakteristische Mannigfaltigkeit für $f|_P$ in p.

   Zeigen Sie: Dann existiert eine Umgebung U um p, so dass $N' = N \cap U$ eine charakteristiche Mannigfaltigkeit für f in p ist.

Abgabe: Dienstag, 01. 12. vor der Vorlesung