Übungen zur Vorlesung „Riemannsche Geometrie und Variationsrechnung“ im Wintersemester 2009/10 bei Prof. V. Bangert

Blatt 07 — 01. 12. 2009

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe auf Ihr Blatt.

1. Sei (M, g) Riemannsche Mannigfaltigkeit.

   Zeigen Sie: Der Injektivitätsradius $p \mapsto i(p)$ ist eine stetige Abbildung.

   Anleitung: Betrachten Sie die Abbildung $\sigma : T^1M \to \mathbb{R}$,

   $$\sigma(X) := \sup\{t \in (0, \infty) \,|\, c_X|_{[0,t]} \text{ ist minimal }\}.$$

   Zeigen Sie zunächst, dass die Abbildung σ stetig ist.

2. Sei (M, g) zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit mit zugehöriger Abstandsfunktion d^g, p, $q \in M$ und

   $$\Omega = \Omega(M, p, q) := \{\omega : [0, 1] \to M | \omega \text{ stw. } C^\infty\text{-Weg von } p \text{ nach } q\}$$

   versehen mit folgender Metrik:

   $$d : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}^+, \quad d(\omega, \omega') = \max_{t \in [0,1]} d^g(\omega(t), \omega'(t)) + \left(\int_0^1 \big| |\dot\omega(t)| - |\dot\omega'(t)| \big|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

   (a) Zeigen Sie: Das Energiefunktional $E(\omega) := \frac{1}{2} \int_0^1 |\dot\omega(t)|^2 dt$ ist stetig auf (Ω, d).

   Betrachten Sie nun zu einer Unterteilung $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_k = 1$ des Einheitsintervalls den Unterraum

   $$\Omega(t_0, t_1, \ldots, t_k) := \{\omega \in \Omega | \, \omega|_{[t_{i-1}, t_i]} \text{ist geodätisches Segment für alle } i = 1, \ldots k\}.$$

   (b) Zeigen Sie: Sei $c > 0$ so groß, dass $\Omega \cap E^{-1}((-\infty, c)) \neq \emptyset$. Dann kann auf $\Omega(t_0, t_1, \ldots, t_k) \cap E^{-1}((-\infty, c))$ auf natürliche Weise eine Mannigfaltigkeitsstruktur definiert werden, falls $t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_k$ eine ausreichend feine Unterteilung ist.

   (c) Zeigen Sie: Ist $a \in (0, c)$, so ist $\Omega(t_0, t_1, \ldots, t_k) \cap E^{-1}((-\infty, a])$ Deformationsretrakt von $\Omega \cap E^{-1}((-\infty, a])$, wobei die Deformationsretraktion $h : \Omega \cap E^{-1}((-\infty, a]) \times [0, 1] \to \Omega \cap E^{-1}((-\infty, a])$, so gewählt werden kann, dass für beliebiges $\omega \in \Omega \cap E^{-1}((-\infty, a])$ die Funktion $t \mapsto E(h_t(\omega))$ monoton fallend ist.

   (d) Zeigen Sie: $\omega \in \Omega(t_0, t_1, \ldots, t_k) \cap E^{-1}((-\infty, a])$ ist genau dann kritischer Punkt des Energiefunktionals E, wenn ω Geodätische ist.

   (e) Seien p, $q \in M$ Punkte. Zeigen Sie mit Hilfe der Aufgabenteile 2a-2d, dass eine kürzeste Geodätische von p nach q existiert.

3. Sei (M, g) zusammenhängende, kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit und $\rho : \tilde{M} \to M$ die universelle Überlagerung von M mit der Riemannschen Metrik $\tilde{g} := \rho^* g$.

(a) Zeigen Sie: $(\tilde{M}, \tilde{g})$ ist vollständig.

Sei $\gamma : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to M$ eine nicht zusammenziehbare geschlossene Kurve und $\tilde{\gamma} : \mathbb{R} \to \tilde{M}$ ein Lift von γ, d.h. $\rho \circ \tilde{\gamma} = \gamma$. Dann existiert eine Decktransformation $h \neq \mathrm{id}_{\tilde{M}}$ von ρ (d.h. h ist ein Diffeomorphismus von $\tilde{M}$ mit $\rho \circ h = \rho$) mit $h(\tilde{\gamma}(0)) = \tilde{\gamma}(1)$.

(b) Zeigen Sie: Die Funktion $f : \tilde{M} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \tilde{d}(x, h(x))$ nimmt auf $\tilde{M}$ ihr Infimum an.
Anleitung: Betrachten Sie eine Minimalfolge $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \tilde{M}$ und nutzen Sie aus, dass Sie eine Folge von Decktransformationen $(h_i)_{i\in\mathbb{N}}$ finden können, so dass die Folge $(h_i(x_i))_{i\in\mathbb{N}}$ in einem kompakten Fundamentalbereich liegt.

(c) Es sei $x_0 \in \tilde{M}$ mit $\tilde{d}(x_0, h(x_0)) = \min_{x\in\tilde{M}} \tilde{d}(x, h(x))$ und $c : [0,1] \to \tilde{M}$ eine kürzeste Geodätische von x_0 nach $h(x_0)$.
Zeigen Sie: Dann gilt $h_*(\dot{c}(0)) = \dot{c}(1)$ und $\rho \circ c : \mathbb{R}/\mathbb{Z} :\to M$ ist eine zu γ (frei) homotope geschlossene Geodätische.

Abgabe: Dienstag, 08. 12. vor der Vorlesung