Übungen zur Vorlesung „Riemannsche Geometrie und Variationsrechnung“ im Wintersemester 2009/10 bei Prof. V. Bangert

Blatt 08 08. 12. 2009

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe auf Ihr Blatt.

1. Sei (M, g) kompakte, zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit, $p, q \in M$.

   Zeigen Sie: Dann existieren mindestens zwei Geodätische $c_1, c_2 : [0,1] \to M$ mit $c_1(0) = c_2(0) = p$ und $c_1(1) = c_2(1) = q$. (Ist $p = q$, so kann eine der beiden Geodätischen konstant sein.)

   Anleitung: Verwenden Sie, dass für ein $k \in \{1, 2, \ldots, \dim(M)\}$ eine Abbildung $f : S^k \to M$ existiert, die nicht homotop zu einer konstanten Abbildung ist. Ohne Einschränkung können Sie annehmen, dass f den Nordpol auf p und den Südpol auf q abbildet.

2. *Morsescher Indexsatz* Sei (M, g) Riemannsche Mannigfaltigkeit und $c : [0,1] \to M$ Geodätische von $c(0) = p$ nach $c(1) = q$. Betrachten Sie auf

   $$\mathfrak{A}_c := \{V | V \text{ stetiges stückweise } C^2\text{-Vektorfeld längs } c \text{ mit } V(0) = 0 = V(1)\}$$

   die symmetrische Bilinearform

   $$I_c : \mathfrak{A}_c \times \mathfrak{A}_c \to \mathbb{R}, \qquad I_c(V, W) = \int_0^1 < V', W' > - < R(V, \dot{c})\dot{c}, W > dt.$$

   Sei weiterhin $N(t) := \dim\{Y | Y \text{ Jacobifeld längs } c|_{[0,1]} \text{ mit } Y(0) = 0 = Y(t)\}$.

   Zeigen Sie:

   (a) Die Nullität $\mathrm{null}(c)$ von I_c ist gegeben durch $\mathrm{null}(c) = N(1)$.

   (b) Der Index $\mathrm{ind}(c)$ von I_c ist gegeben durch $\mathrm{ind}(c) = \sum_{t \in (0,1)} N(t)$.

   Anleitung: Erarbeiten Sie den Beweis mit Hilfe des Buches „Riemannian Geometry“von M.P. do Carmo (Chapter 11).

3. Sei V ein Vektorraum und U_1, U_2 komplementäre Untervektorräume, so dass $V = U_1 \oplus U_2$, und seien $b_i : U_i \times U_i \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, symmetrische Bilinearformen mit Index $\mathrm{ind}(b_i)$. Betrachten Sie die Bilinearform $b : V \times V \to \mathbb{R}$,

   $$b((u_1, u_2), (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)) = b_1(u_1, \tilde{u}_1) + b_2(u_2, \tilde{u}_2) \qquad \text{für } (u_1, u_2), (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2) \in U_1 \oplus U_2 = V.$$

   Zeigen Sie: Der Index von b ist gegeben durch

   $$\mathrm{ind}(b) = \mathrm{ind}(b_1) + \mathrm{ind}(b_2).$$

Abgabe: Dienstag, 15. 12. vor der Vorlesung