Übungen zur Vorlesung „Riemannsche Geometrie und Variationsrechnung“ im Wintersemester 2009/10 bei Prof. V. Bangert

Blatt 09 15. 12. 2009

Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf Ihr Blatt.

1. Sei M Riemannsche Mannigfaltigkeit, $c : \mathbb{R} \to M$ eine 1-periodische Geodätische und $\mathcal{V}_c = V_c \otimes \mathbb{C}$ die Komplexifizierung von $V_c := \{X \,|\, X \in \Gamma(c^*TM)$ stetig und stückweise $C^2\}$.

   Betrachten Sie zu $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$ den Unterraum $\mathcal{V}_c^z := \{X \in \mathcal{V}_c \,|\, X(t+1) = zX(t)\}$. Dann ist $\mathcal{V}_c^{\text{per}} = \mathcal{V}_c^1$.

   Bezeichne außerdem $< \cdot, \cdot >$ die Erweiterung der Metrik zu einer Hermiteschen Form und R die Erweiterung des Riemannschen Krümmungstensors zu einem komplex-linearen Tensor auf $\mathcal{V}_c$, so sei I_c^z die z-Indexform

$$I_c^z(X,Y) = \int_0^1 (< X', Y' > - < R(X,\dot{c})\dot{c}, Y >)dt$$

   definiert auf $\mathcal{V}_c^z \times \mathcal{V}_c^z$.

   Zeigen Sie:

$$\operatorname{ind}(c^m) := \operatorname{ind}(I_{c^m}|_{\mathcal{V}_{c^m}^{\text{per}} \times \mathcal{V}_{c^m}^{\text{per}}}) = \sum_{z^m=1} \operatorname{ind}(I_c^z).$$

   Anleitung: Zeigen Sie zunächst, dass $\bigoplus_{l=1}^m \mathcal{V}_c^{z^l}$ isomorph zu $\mathcal{V}_{c^m}$ ist, falls $z = e^{2\pi \frac{i}{m}}$. Betrachten Sie dazu die Abbildungen

$$j : \bigoplus_{l=1}^m \mathcal{V}_c^{z^l} \to \mathcal{V}_{c^m}^{\text{per}}, \quad j(X_1, \ldots, X_m)(t) = \sum_{l=1}^m z^l X_l(mt) \qquad \text{und}$$

$$i : \mathcal{V}_{c^m}^{\text{per}} \to \bigoplus_{l=1}^m \mathcal{V}_c^{z^l}, \quad i(X) = (X_1, \ldots, X_m) \text{ mit } X_l(t) = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^m z^{-lj} X\left(\frac{t+j-1}{m}\right)$$

   und benutzen Sie, dass $\sum_{l=1}^m z^{l(1-j)} = m\delta_{j1}$ gilt. Zeigen Sie dann, dass die quadratische Form I_{c^m} auf $\mathcal{V}_{c^m}^{\text{per}}$ mit der direkten Summe $\frac{1}{m} \oplus_{l=1}^m I_c^{z^l}$ der quadratischen Formen identifiziert werden kann.

2. Betrachten Sie den n-dimensionalen Torus $\mathbb{T}^n$ versehen mit einer Riemannschen Metrik g. Zeigen Sie:

   (a) Es existieren unendlich viele (geometrisch verschiedene) geschlossene Geodätische auf $(\mathbb{T}^n, g)$.

   (b) Sei $N_g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ die Funktion, die die geometrisch verschiedenen geschlossenen Geodätischen auf $(\mathbb{T}^n, g)$ mit Länge höchstens t zählt. Dann wächst N_g mindestens wie ein Polynom vom Grad n.

3. Sei (M, g) eine vollständige, nichtkompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit und $S \subseteq M$ eine kompakte Hyperfläche in M.

   Zeigen Sie: Ist $\gamma : S^1 \to M$ eine Kurve, so dass die Schnittzahl mod 2 von γ mit S gleich 1 ist, so existiert auf M eine geschlossene Geodätische, die frei homotop zu γ ist.

Abgabe: Dienstag, 22. 12. vor der Vorlesung