Übungen zur Vorlesung „Riemannsche Geometrie und Variationsrechnung“ im Wintersemester 2009/10 bei Prof. V. Bangert

Blatt 10 12. 01. 2009

Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf Ihr Blatt.

1. Sei M eine vollständige Mannigfaltigkeit und $p : \tilde{M} \to M$ eine Riemannsche Überlagerung.

   Zeigen Sie: Jeder Lift einer minimalen Geodätischen in M ist eine minimale Geodätische in $\tilde{M}$.

2. Sei (M, g) zusammenhängende, vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit.

   Zeigen Sie: (M, g) ist genau dann einfach zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit ohne konjugierte Punkte, wenn alle Geodätischen auf M minimal sind.

   Anleitung: Betrachten Sie zu einem Punkt $p \in M$ die Mannigfaltigkeit T_pM mit der Riemannschen Metrik $\exp_p^* g$. Wenden Sie in dieser Situation das folgende Lemma an:

   Lemma: Ist $(\tilde{M}, \tilde{g})$ vollständige Riemannsche Manngifaltigkeit und $F : (\tilde{M}, \tilde{g}) \to (M, g)$ lokale Isometrie, so ist F eine Überlagerung. (vgl. DG II, Blatt 12, Aufgabe 3)

3. Sei (M, g) zusammenhängende, vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit, $c : \mathbb{R} \to M$ Geodätische und $p : (\tilde{M}, \tilde{g}) \to (M, g)$ die Universelle Riemannsche Überlagerung.

   Zeigen Sie das folgende Aussagen äquivalent sind:

   (a) Jedes Segment $c : I \subseteq \mathbb{R} \to M$ ist minimal in seiner Homotopieklasse, d.h.

   $$L(c|_I) = \min_{\gamma \in \mathcal{G}_I} L(\gamma),$$

   wobei $\mathcal{G}_I := \{\gamma : I \to M \mid \gamma \text{ ist homotop zu } c|_I \text{ mit festen Endpunkten } \}$.

   (b) Ein (=> Jeder) Lift von c nach $\tilde{M}$ ist eine minimale Geodätische.

Abgabe: Dienstag, 19. 01. vor der Vorlesung