Übungen zur Vorlesung „Riemannsche Geometrie und Variationsrechnung“ im Wintersemester 2009/10 bei Prof. V. Bangert

Blatt 11 19. 01. 2009

Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf Ihr Blatt.

1. Die Spirale $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = e^t\, e^{it} = e^{(1+i)t}$, ist bezüglich der üblichen euklidischen Metrik auf $\mathbb{R}^2$ eine $\sqrt{2}$-quasiminimale Kurve.

2. Sei (M, g) Riemannsche Mannigfaltigkeit.

   (a) Zeigen Sie: Ist $\gamma : [a, b] \to M$ Kürzeste, d.h. $L(\gamma) = d(\gamma(a), \gamma(b))$, so ist auch jedes Teilstück von γ Kürzeste, d.h. für alle $[s, t] \subseteq [a, b]$ ist $\gamma|_{[s,t]}$ Kürzeste.

   (b) Sei $\gamma : [a, b] \to M$ eine stückweise C^1-Kurve und es gelte für ein $Q > 1$:
   $$L(\gamma) \leq Q\, d(\gamma(a), \gamma(b)).$$
   Folgt dann bereits für jedes $[s, t] \subseteq [a, b]$, dass $L(\gamma|_{[s,t]}) \leq Q\, d(\gamma(s), \gamma(t))$ gilt?

3. Sei (M, g) vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit.

   Zeigen Sie:

   (a) Zwei geometrisch verschiedene minimale Geodätische besitzen höchstens einen Schnittpunkt.

   (b) Besitzen zwei geometrisch verschiedene minimale Geodätische einen Schnittpunkt, so existiert ein Ball um diesen Schnittpunkt und ein $\varepsilon > 0$, so dass die beiden Geodätischen außerhalb dieses Balls mindestens Abstand ε haben.

Abgabe: Dienstag, 26. 01. vor der Vorlesung