Übungen zur Vorlesung „Riemannsche Geometrie und Variationsrechnung“ im Wintersemester 2009/10 bei Prof. V. Bangert

Blatt 12 26. 01. 2010

Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf Ihr Blatt.

1. Sei g Riemannsche Metrik auf $B^n := \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, |x| < 1\}$, so dass $0 < \alpha \leq \beta$ existieren mit $\alpha^2 g^{\text{hyp}} \leq g \leq \beta^2 g^{\text{hyp}}$, wobei $g^{\text{hyp}}|_x = (\frac{2}{1-|x|^2})^2 g^{\text{eukl.}}|_x$ die hyperbolische Metrik bezeichnet.

   Zeigen Sie: Für jeden Punkt $p \in B^n$ und jedes $y \in \partial B^n = S^{n-1}$ existiert eine g-minimale Geodätische $c : [0, \infty) \to B^n$ mit $c(0) = p$ und $\lim_{t\to\infty} c(t) = y$.

2. Finden Sie eine Metrik auf dem Möbiusband $M = \mathbb{R} \times (-1, 1)/\Gamma$ mit $\Gamma = \{h_n \,|\, n \in \mathbb{Z},\, h_n(x, y) = (x + n, (-1)^n y)\,\}$, so dass gilt:

   Die Kurve $c : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to M$, $c(t) = (t, 0)$, hat minimale Länge in ihrer freien Homotopieklasse, während das für

   $$c^2(t) : \mathbb{R}/Z \to M, \qquad c^2(t) = c(2t) = (2t, 0)$$

   nicht gilt.

3. Sei (M, g) eine einfach zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit mit nichtpositiver Schnittkrümmung und $c : \mathbb{R} \to M$ eine Geodätische.

   Zeigen Sie: Die metrische Projektion $\pi : M \to C := c(\mathbb{R})$ ist eine wohldefinierte C^∞-Abbildung.

Abgabe: Dienstag, 02. 02. vor der Vorlesung