Übungen zur Vorlesung „Mathematik I für Studierende des Ingenieurwesens und der Informatik“ im Wintersemester 2010/11 bei Prof. Dr. V. Bangert

Blatt 10 20.12.2010

1. *(2 Punkte)* Bestimmen Sie mit Hilfe der Regel von l'Hospital folgende Grenzwerte:

$$(a) \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^{-x^2} - 1 + x^2}{x^4} \qquad\qquad (b) \quad \lim_{x\to 0+} x^x$$

2. *(2 Punkte)* Berechnen Sie für folgende Funktionen die Ableitungen:

   (a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \arctan^2(x^3)$ (b) $g : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin^2(\ln(x)) - \cos^2(\ln(x))$

3. *Newton-Verfahren (6 Punkte)* Mit Hilfe des Newton-Verfahrens kann die Zahl π aus folgender Gleichung approximiert werden:

$$\tan\left(\frac{x}{4}\right) - \cot\left(\frac{x}{4}\right) = 0.$$

   Gehen Sie dazu in folgenden Schritten vor (Sie können für die Rechnungen einen Taschenrechner oder den Computer benutzen):

   (a) Betrachten Sie die Funktion $f :]0, 2\pi[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \tan(\frac{x}{4}) - \cot(\frac{x}{4})$ und bestimmen Sie die ersten beiden Ableitungen von f.

   (b) Zeigen Sie, dass π die einzige Nullstelle von f ist.
   Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $f' > 0$ gilt und folgern Sie daraus, dass höchstens eine Nullstelle existiert.

   (c) Berechnen Sie die Funktion $F(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)}$, die für das Newton-Verfahren definiert wird, und ihre erste Ableitung.

   (d) Zeigen Sie, dass F monoton wächst. Folgern Sie daraus, dass $F([3, 4]) \subseteq [3, 4]$ indem Sie die Funktionswerte von 3 und 4 berechnen.

   (e) Bestimmen Sie π (also die Nullstelle von f) mit Hilfe des Newton-Verfahrens auf 6 Nachkommastellen genau. Für die Fehlerabschätzung benützen Sie Satz (3.2.12)(3), wobei Sie $K = \frac{2}{5}$ annehmen können (Die Abschätzung $|F'(x)| \leq \frac{2}{5}$ für $x \in [3, 4]$ folgt aus einer elementaren Rechnung).

4. *(6 Punkte)* Betrachten Sie die Funktion $f(x) = \tan(x) - x$ auf dem Intervall $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

   (a) Zeigen Sie: Zu jedem $y \in \mathbb{R}$ existiert ein $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, so dass $f(x) = y$.

   (b) Zeigen Sie, die Funktion f streng monoton wächst und folgern Sie daraus, dass die Umkehrfunktion $g : \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ existiert.
   Hinweis: Zeigen sie zunächst, dass $f(x) < 0\,(> 0)$, falls $x < 0\,(> 0)$. Machen Sie nun eine Fallunterscheidung und benützen Sie Satz (3.2.3).

   (c) Zeigen Sie, dass die Funktion g für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ differenzierbar ist und die Gleichung $g'(x) = (g(x) + x)^{-2}$ erfüllt.

Abgabe: Montag, 10.01.2011, vor der Vorlesung

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt

Anwesenheitsaufgaben zur Vorlesung „Mathematik I für Studierende des Ingenieurwesens und der Informatik“ im Wintersemester 2010/11 bei Prof. Dr. V. Bangert

Blatt 10 20.12.2010

1. Bestimmen Sie mit Hilfe der Regel von l'Hospital folgende Grenzwerte:
   (a) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x}-1}{x}$
   (b) $\lim_{x\to \infty} \frac{\ln(x)}{x}$

2. Zeigen Sie mit Satz (3.2.12), dass die Funktion $f(x) = (x-2)^3 + 2,1$ im Intervall $[\frac{3}{2}, \frac{5}{2}]$ einen Fixpunkt besitzt.

   Starten Sie mit $x_0 = 2$ und berechnen Sie mit Hilfe des in Satz (3.2.12)(2) angegebenen Algorithmus $x_{n+1} = f(x_n)$ die Werte von x_1 und x_2. Bestimmen Sie mit Satz (3.2.12)(3) eine a-posteriori-Fehlerabschätzung für x_2.