Übungen zur Vorlesung „Mathematik I für Studierende des Ingenieurwesens und der Informatik“ im Wintersemester 2010/11 bei Prof. Dr. V. Bangert

Blatt 11 10.01.2010

1. *Die Hyperbelfunktionen (6 Punkte):*

   Die Hyperbelfunktionen sind folgendermaßen definiert:

   $$\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$
   $$\tanh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

   Zeigen Sie

   (a) Es gilt: $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$.

   (b) Es gilt: $(\sinh)' = \cosh$ und $(\cosh)' = \sinh$ und $(\tanh)' = \frac{1}{\cosh^2}$.

   (c) Zu jedem $y \in \mathbb{R}$ existiert genau ein $x \in \mathbb{R}$, so dass $\sinh(x) = y$.

   (d) Bestimmen Sie explizit die Umkehrfunktion von sinh, genannt Areasinushyperbolicus $\operatorname{arsinh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

   Hinweis: Multiplizieren Sie die Gleichung $y = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ zunächst mit $2 \cdot e^x$ und lösen Sie sie dann nach x auf.

   (e) Bestimmen Sie die Ableitung von $\operatorname{arsinh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

   (f) Zeichnen Sie die Graphen von $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\tanh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

2. Ein Seil, das nur unter der Last seines eigenen Gewichts hängt, beschreibt eine Kettenlinie (zur Herleitung dieser Aussage vergleichen Sie z.B. “Katenoide” bei Wikipedia):

   $$y(x) = b + a \cosh\left(\frac{x+c}{a}\right), \quad a > 0.$$

   (a) Zeigen Sie: y erfüllt folgende Differentialgleichung: $ay'' = \sqrt{1 + y'^2}$.

   (b) Nehmen Sie an, dass das Seil zwischen dem Anfangspunkt $(0, 10)$ und dem Endpunkt $(30, 190)$ so aufgehängt ist, dass es am Anfangspunkt horizontal mündet. Leiten Sie daraus drei Gleichungen ab, die a, b und c bestimmen. Bestätigen Sie, dass $\xi = \frac{30}{a}$ die Gleichung

   $$6\xi + 1 = \cosh(\xi)$$

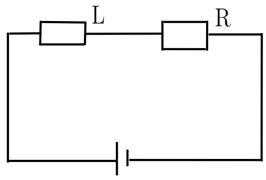
   erfüllt.

   (c) *(2 Zusatzpunkte)* Bestimmen Sie eine Näherung von ξ mit dem Newton-Verfahren.

   Hinweis: Wählen Sie 4 als Startwert der Iteration und führen Sie drei Iterationsschritte durch.

3. *(2 Punkte)* Stellen Sie $\arcsin(y)$ als Funktion von $\arccos(y)$ dar.

4. *Exponentielle Sättigung:* Gegeben sei ein Stromkreis mit einer Induktivität L



und einem Widerstand R. Wird an den Stromkreis eine konstante Gleichspannung U angeschlossen, so entsteht ein zeitabhängiger Strom $I(t)$ mit dem Anfangswert $I(0) = 0$, der folgende Differentialgleichung erfüllt:

$$LI'(t) + RI(t) = U.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion $u(t) := I(t) - \frac{U}{R}$ folgende Differentialgleichung löst:

$$u'(t) = -\frac{R}{L}u(t). \tag{1}$$

(b) Bestimmen Sie den Anfangswert $u_0 = u(0)$ und die Lösung der Differentialgleichung (1) zu diesem Anfangswert. Berechnen Sie daraus $I(t)$.

Hinweis: Benützen Sie Blatt 9, Aufgabe 5.

Abgabe: Montag, 17.01.2011, vor der Vorlesung

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt

Anwesenheitsaufgaben zur Vorlesung „Mathematik I für Studierende des Ingenieurwesens und der Informatik“ im Wintersemester 2010/11 bei Prof. Dr. V. Bangert

Blatt 11 10.01.2010

---

1. Der Cosinushyperbolicus wird folgendermaßen definiert:

$$\cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}).$$

Zeigen Sie:

(a) Zu jedem $y \in \mathbb{R}_{\geq 1}$ existiert genau ein $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, so dass $\cosh(x) = y$.

(b) Bestimmen Sie explizit die Umkehrfunktion von cosh, genannt Areacosinushyperbolicus, $\operatorname{arcosh} : \mathbb{R}_{\geq 1} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$.
Hinweis: Multiplizieren Sie die Gleichung $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ zunächst mit $2 \cdot e^x$ und lösen Sie sie dann nach x auf.

2. Stellen Sie $\arccos(-y)$ als Funktion von $\arccos(y)$ dar.

Hinweis: Zeigen Sie mit Hilfe der Additionstheoreme, dass gilt: $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$.