

# Übungen zur Vorlesung „Mathematik I für Studierende des Ingenieurwesens und der Informatik“

im Wintersemester 2010/11 bei Prof. Dr. V. Bangert

Blatt 12

17.01.2010

1. 6 Punkte: Berechnen Sie folgende Integrale

- (a) *partielle Integration:*  $\int_0^1 \arctan(x) dx$ ,  $\int \cosh(x) \sin(x) dx$ ,
- (b) *Substitutionsregel:*  $\int_1^4 e^{\sqrt{x}} dx$ ,  $\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx$ ,  $a > 0$ ,
- (c) *Partialbruchzerlegung:*  $\int_{-\frac{1}{3}}^0 \frac{x^3+x^2}{3x+2} dx$ ,  $\int_0^1 \frac{2x^2+2x+4}{(x+1)^2(x^2+1)} dx$ .

2. 6 Punkte: Seien  $u, v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  zwei stückweise stetige Funktionen. Das Integral über die komplexwertige Funktion  $z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z(x) = u(x) + i \cdot v(x)$ , ist folgendermaßen definiert:

$$\int_a^b z(x) dx := \int_a^b u(x) dx + i \cdot \int_a^b v(x) dx \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

- (a) *Integral von  $e^{ix}$ :* Zeigen Sie:  $\int_a^b e^{ix} dx = -i(e^{ib} - e^{ia})$ .
- (b) Zeigen Sie für  $k, l \in \mathbb{Z}$ :

$$\int_0^{2\pi} e^{ikx} \cdot e^{-ilx} dx = \begin{cases} 0 & \text{für } k \neq l \\ 2\pi & \text{für } k = l \end{cases}$$

(c) Bestimmen Sie für  $m, n \in \mathbb{N}$

$$\int_0^{2\pi} \cos(mx) \cos(nx) dx, \quad \int_0^{2\pi} \cos(mx) \sin(nx) dx, \quad \int_0^{2\pi} \sin(mx) \sin(nx) dx.$$

Hinweis: Benutzen Sie Aufgabenteil b).

3. Eine zweistufige Rakete hat die in der Tabelle angegebenen Kenndaten. Die Rakete startet senkrecht. Wenn der Treibstoff der 1. Stufe verbraucht ist, so wird deren Hülle abgestoßen. Setzt man unabhängig von der Höhe vereinfachend  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ , so gilt für die Beschleunigung der Rakete

$$h''(t) = v'(t) = a(t) = \frac{F}{m(t)} - g,$$

wobei  $h(t)$  die Höhe der Rakete,  $v(t)$  die Geschwindigkeit der Rakete,  $m(t)$  die Masse der Rakete und  $F$  die Schubkraft bezeichnet.

|          | Leermasse | Treibstoffmasse | Verbrauch | Schubkraft F               |
|----------|-----------|-----------------|-----------|----------------------------|
| 1. Stufe | 1000 kg   | 25000 kg        | 500 kg/s  | $2,0 \cdot 10^6 \text{ N}$ |
| 2. Stufe | 500 kg    | 8000 kg         | 40 kg/s   | $3,0 \cdot 10^5 \text{ N}$ |

- (a) Man bestimme die Funktion  $m(t)$ .  
Hinweis: Die Gesamtmasse beim Start der Rakete ist  $m(0) = 34500$  kg.
- (b) Welche Geschwindigkeit  $v$  hat die Rakete  $50s$  bzw.  $250s$  nach dem Start?
- (c) Welche Höhe  $h$  wird nach  $50s$  bzw.  $250s$  erreicht?

Abgabe: Montag, 24.01.2011, vor der Vorlesung

*Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt*

**Anwesenheitsaufgaben zur Vorlesung „Mathematik I für  
Studierende des Ingenieurwesens und der Informatik“  
im Wintersemester 2010/11 bei Prof. Dr. V. Bangert**

Blatt 12

17.01.2010

---

1. Berechnen Sie folgendes unbestimmtes Integral mittels Partialbruchzerlegung:

$$\int \frac{x^3 - 2}{x^5 + x^2} dx$$

2. Berechnen Sie folgendes Integral mittels partieller Integration:

$$\int_0^{\pi} x^2 \sin(x) dx$$