Übungen zur Vorlesung „Mathematik I für Studierende des Ingenieurwesens und der Informatik“ im Wintersemester 2010/11 bei Prof. Dr. V. Bangert

Blatt 12 17.01.2010

1. *6 Punkte:* Berechnen Sie folgende Integrale

   (a) *partielle Integration:* $\int_0^1 \arctan(x)\,dx$, $\int \cosh(x)\sin(x)\,dx$,

   (b) *Substitionsregel:* $\int_1^4 e^{\sqrt{x}}\,dx$, $\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$, $a > 0$,

   (c) *Partialbruchzerlegung:* $\int_{-\frac{1}{3}}^{0} \frac{x^3+x^2}{3x+2}\,dx$, $\int_0^1 \frac{2x^2+2x+4}{(x+1)^2(x^2+1)}\,dx$.

2. *6 Punkte:* Seien u, $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei stückweise stetige Funktionen. Das Integral über die komplexwertige Funktion $z : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $z(x) = u(x) + i \cdot v(x)$, ist folgendermaßen definiert:

$$\int_a^b z(x)\,dx := \int_a^b u(x)\,dx + i \cdot \int_a^b v(x)\,dx \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

   (a) *Integral von e^{ix}:* Zeigen Sie: $\int_a^b e^{ix}\,dx = -i(e^{ib} - e^{ia})$.

   (b) Zeigen Sie für $k, l \in \mathbb{Z}$:

$$\int_0^{2\pi} e^{ikx} \cdot e^{-ilx}\,dx = \begin{cases} 0 & \text{für } k \neq l \\ 2\pi & \text{für } k = l \end{cases}$$

   (c) Bestimmen Sie für m, $n \in \mathbb{N}$

$$\int_0^{2\pi} \cos(mx)\cos(nx)\,dx, \qquad \int_0^{2\pi} \cos(mx)\sin(nx)\,dx, \qquad \int_0^{2\pi} \sin(mx)\sin(nx)\,dx.$$

   Hinweis: Benutzen Sie Aufgabenteil b).

3. Eine zweistufige Rakete hat die in der Tabelle angegebenen Kenndaten. Die Rakete startet senkrecht. Wenn der Treibstoff der 1. Stufe verbraucht ist, so wird deren Hülle abgestoßen. Setzt man unabhängig von der Höhe vereinfachend $g = 9,81 m/s^2$, so gilt für die Beschleunigung der Rakete

$$h''(t) = v'(t) = a(t) = \frac{F}{m(t)} - g,$$

   wobei $h(t)$ die Höhe der Rakete, $v(t)$ die Geschwindigkeit der Rakete, $m(t)$ die Masse der Rakete und F die Schubkraft bezeichnet.

	Leermasse	Treibstoffmasse	Verbrauch	Schubkraft F
1. Stufe	1000 kg	25000 kg	500 kg/s	$2{,}0 \cdot 10^6$N
2. Stufe	500 kg	8000 kg	40 kg/s	$3{,}0 \cdot 10^5$N

(a) Man bestimme die Funktion $m(t)$.
Hinweis: Die Gesamtmasse beim Start der Rakete ist $m(0) = 34500$ kg.

(b) Welche Geschwindigkeit v hat die Rakete $50s$ bzw. $250s$ nach dem Start?

(c) Welche Höhe h wird nach $50s$ bzw. $250s$ erreicht?

Abgabe: Montag, 24.01.2011, vor der Vorlesung
Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt

Anwesenheitsaufgaben zur Vorlesung „Mathematik I für Studierende des Ingenieurwesens und der Informatik“ im Wintersemester 2010/11 bei Prof. Dr. V. Bangert

Blatt 12 17.01.2010

---

1. Berechnen Sie folgendes unbestimmtes Integral mittels Partialbruchzerlegung:

$$\int \frac{x^3 - 2}{x^5 + x^2}\, dx$$

2. Berechnen Sie folgendes Integral mittels partieller Integration:

$$\int_0^\pi x^2 \sin(x)\, dx$$