Übungen zur Vorlesung „Mathematik I für Studierende des Ingenieurwesens und der Informatik“ im Wintersemester 2010/11 bei Prof. Dr. V. Bangert

Blatt 13 20.01.2010

1. *Inverse Monome mit komplexen Nullstellen $\pm i$:* Bestimmen Sie eine Rekursionsformel, mit der die unbestimmten Integrale

$$I_l := \int \frac{1}{(t^2+1)^l}\, dt, \qquad l \in \mathbb{N}$$

berechnet werden können. Gehen Sie dazu folgendermaßen vor:

(a) Berechnen Sie $I_1 = \int \frac{1}{t^2+1}\, dt$.

(b) Berechnen Sie mittels Substitution $\int \frac{2t}{(t^2+1)^l}\, dt$.

(c) Bestimmen Sie mittels partieller Integration von $I_{l-1} = \int \frac{1}{(t^2+1)^{l-1}}\, dt$ eine Gleichung für I_{l-1} und I_l.
Hinweis: Benutzen Sie, dass $\frac{1}{(t^2+1)^{l-1}} = \frac{t^2+1}{(t^2+1)^l}$ gilt.

(d) Lösen Sie die in Aufgabenteil 1c) erhaltene Gleichung nach I_l auf.

2. *Inverse Monome mit allgemeinen komplexen Nullstellen:* Bestimmen Sie eine Rekursionsformel, mit der die unbestimmten Integrale

$$I_l := \int \frac{cx+d}{((x-a)^2+b^2)^l}\, dx, \qquad l \in \mathbb{N}, \quad b \neq 0$$

berechnet werden können. Gehen Sie dazu folgendermaßen vor:

(a) Berechnen Sie mittels Substitution: $\int \frac{2(x-a)}{((x-a)^2+b^2)^l}\, dx$.

(b) Zeigen Sie mittels Substitution, dass $\int \frac{1}{((x-a)^2+b^2)^l}\, dx$ mit Hilfe der Rekursionsformel aus Aufgabe 1) bestimmt werden kann.

(c) Zerlegen Sie $\frac{cx+d}{((x-a)^2+b^2)^l}$ geschickt und bestimmen Sie dann mit Aufgabenteil 2a) und 2b) eine Rekursionsformel für $\int \frac{cx+d}{((x-a)^2+b^2)^l}\, dx$.

(d) Leiten Sie aus obiger Formel eine Rekursionsformel für Integrale folgender Form ab:

$$\int \frac{cx+d}{(x^2+px+q)^l}\, dx, \qquad l \in \mathbb{N}, \quad 4q-p^2 > 0.$$

3. Zeigen Sie, dass für jedes $\alpha > 1$ die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

konvergiert. Gehen Sie dazu folgendermaßen vor:

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$, monoton fällt.

(b) Wählen Sie eine geeignete Zerlegung des Intervalls $[1, k]$, $k \in \mathbb{N}$, $k > 2$ und geeignete Stützstellen, so dass für die zugehörige Riemannsumme $S_k(f)$ von f gilt:

$$\sum_{n=2}^{k} \frac{1}{n^\alpha} = S_k(f) \leq \int_1^k \frac{1}{x^\alpha}\, dx.$$

(c) Folgern Sie, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ konvergiert.

4. Betrachten Sie die Funktion $f : [-3, 3] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{9 - x^2}$.

(a) Berechnen Sie das Integral $\int_0^1 \sqrt{9 - x^2}\, dx$ exakt.
Hinweis: Zeigen Sie mit Hilfe der Additionstheoreme zunächst, dass
$\sin^2(t) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2t))$ gilt.

(b) Berechnen Sie mit der Trapezregel einen Näherungswert zur Schrittweite $\frac{1}{4}$ von $\int_0^1 \sqrt{9 - x^2}\, dx$.

(c) Welche Fehlerabschätzung erhalten Sie mit Satz (4.5.2)? Vergleichen Sie diese mit dem echten Fehler.

Abgabe: Montag, 31.01.2011, vor der Vorlesung

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt

Übungen zur Vorlesung „Mathematik I für Studierende des Ingenieurwesens und der Informatik“ im Wintersemester 2010/11 bei Prof. Dr. V. Bangert

20.01.2010

Eine Anwendung der Substitutionsformel:(6 Zusatzpunkte)

Der Bordcomputer eines Autos zeigt zu jedem Zeitpunkt t den momentanen “Verbrauch” $f(t)$ angegeben in $\mathrm{l}/100\,\mathrm{km}$ an. Fahrer sind geneigt, das zeitliche Mittel von $f(t)$ für den Durchschnittsverbrauch (in $\mathrm{l}/100\,\mathrm{km}$) zu halten.

1. Überlegen Sie an folgendem Beispiel, dass das nicht stimmt:

   Aufgehalten durch eine lange Geschwindigkeitsbegrenzung fährt der Fahrer zunächst eine halbe Stunde lang konstant mit $50\,\mathrm{km}/\mathrm{h}$ und die Verbrauchsanzeige zeigt dabei konstant $4\ \mathrm{l}/100\,\mathrm{km}$ an. Danach beschleunigt der Fahrer schnell auf $130\ \mathrm{km}/\mathrm{h}$ und fährt dann konstant eine Stunde lang dieses Tempo mit konstanter Verbrauchsanzeige $6\ \mathrm{l}/100\,\mathrm{km}$. Wir vernachlässigen den kurzen Beschleunigungsvorgang bei unserer Rechnung und setzen
   $$f(t) = \begin{cases} 4 & \text{, falls } 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ 6 & \text{, falls } \frac{1}{2} \le t \le \frac{3}{2} \end{cases}$$
   Berechnen Sie das Zeitmittel $\overline{f}$ der Verbrauchsanzeige
   $$\overline{f} = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt \qquad \text{für } T = \frac{3}{2},$$
   den Gesamtverbrauch F (in l) in der Zeit zwischen 0 und $1\frac{1}{2}$ h und die insgesamt zurückgelegte Strecke S (in $100\,\mathrm{km}$).

   Vergleichen Sie $\overline{f}$ und F/S.

2. Betrachten Sie die Situation allgemein:

   Sei $s(t)$ die Strecke (in $100\,\mathrm{km}$), die in der Zeit von $0\,\mathrm{h}$ bis $t\,\mathrm{h}$ zurückgelegt wurde ($s(0) = 0$), $v(t) := s'(t)$ die Geschwindigkeit und $F(s)$ der Verbrauch (in l) auf der Strecke von 0 bis s.

   Berechnen Sie aus $f(t)$ und $v(t)$ eine Formel für den durchschnittlichen Verbrauch $\frac{F(s(T))}{s(T)}$ (in $\mathrm{l}/100\,\mathrm{km}$) nach der Zeit T.

   Hinweis: Überlegen Sie, dass die Verbrauchsanzeige den Wert $f(t) = F'(s(t))$ anzeigt.

(freiwillige!) Abgabe: Montag, 31.01.2011, vor der Vorlesung

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt

Anwesenheitsaufgaben zur Vorlesung „Mathematik I für Studierende des Ingenieurwesens und der Informatik“ im Wintersemester 2010/11 bei Prof. Dr. V. Bangert

Blatt 13 20.01.2010

1. Betrachten Sie die Funktion $f : [-3, 3] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{9 - x^2}$.

   (a) Zeichnen Sie den Graphen von f.

   (b) Berechnen Sie mit der Trapezregel einen Näherungswert zur Schrittweite 1 von $\int_0^1 \sqrt{9 - x^2}\, dx$.

   (c) Schraffieren Sie die Fläche, deren Flächeninhalt durch $\int_0^1 \sqrt{9 - x^2}\, dx$ berechnet wird.