

**Übungen zur Vorlesung „Mathematik I für Studierende des
Ingenieurwesens und der Informatik“**

im Wintersemester 2010/11 bei Prof. Dr. V. Bangert

Blatt 05

15.11.2010

1. (4 Punkte) Verwenden Sie die Additionstheoreme für Sinus und Cosinus, um

$$(a) \quad \sin 2x, \quad (b) \quad \cos 2x,$$

als Funktionen von $\sin x$, $\sin y$, $\cos x$, $\cos y$ darzustellen, und um

$$(c) \quad \tan(x + y)$$

als Funktion in $\tan x$ und $\tan y$ darzustellen.

2. (4 Punkte)

- (a) Schreiben Sie die komplexen Zahlen

$$(i - 1)^{13} \quad \text{und} \quad \left(\frac{i\sqrt{3} - 1}{i\sqrt{3} + 1} \right)^{23}$$

jeweils in der Form $a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Anwesenheitsaufgabe 2 ist hilfreich.

- (b) Skizzieren Sie die folgenden Punktmengen in \mathbb{C} :

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z - i - 1| \leq 2\}, \quad \{z \in \mathbb{C} \mid z = te^{it}, 0 \leq t \leq 4\pi\}, \quad \{z \in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Im}(z^2)| \leq 2\}$$

3. (4 Punkte) Die Summe der beiden gleichfrequenten Schwingungen

$$s(t) := \sin(\omega t + \varphi_1) + 2 \sin \omega t$$

lässt sich nach der Vorlesung darstellen als

$$s(t) = A \sin(\omega t + \varphi).$$

Berechnen Sie Amplitude A und Nullphase φ dieser Schwingung für $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$ (mit dem Taschenrechner). Für welche Werte von φ_1 ist A maximal bzw. minimal? Wie groß/klein ist A dann?

4. (4 Punkte) *Längster Tag im Jahr.* Zeigen Sie: Bei Sommersonnenwende ist die Sonnenscheindauer (in Stunden) in einem Ort der geographischen Breite θ mit $|\theta| \leq \theta_0$ höchstens

$$S(\theta) = 12 \left(1 + \frac{2}{\pi} \arcsin \left(\frac{\tan \theta}{\tan \theta_0} \right) \right).$$

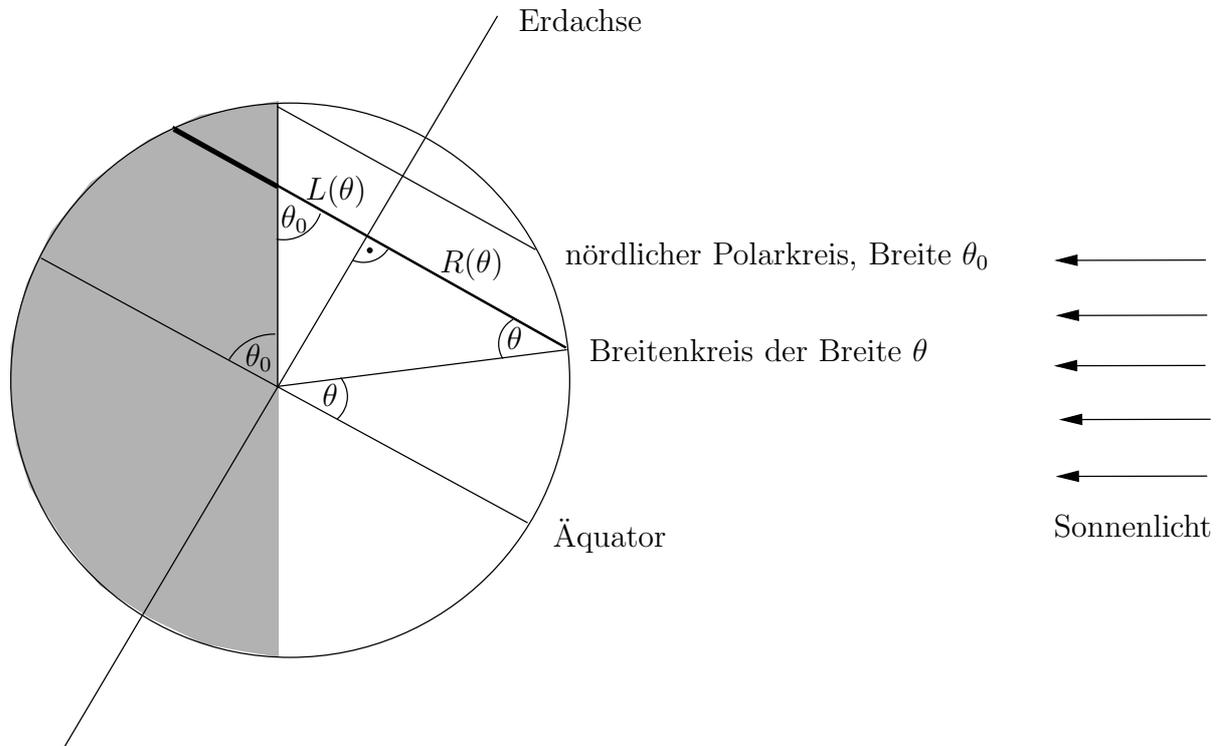
Dabei ist $\theta_0 = 66^\circ 30'$ die geographische Breite des nördlichen Polarkreises. *Auf der Rückseite gibt es dazu eine Anleitung.* Wie lang ist der längste Tag in Freiburg ($\theta = 48^\circ$)?

Abgabe: Montag, 22.11.2010, vor der Vorlesung

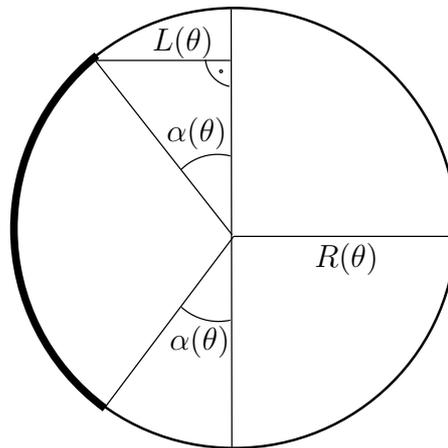
Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt

Anleitung zu Aufgabe 4:

Zur Zeit der Sommersonnenwende ergibt sich das folgende Bild:



Dabei zeigt die stärker gezogene Linie den lichtabgewandten Bogen des Breitenkreises der Breite θ . Blicke man in Richtung der Erdachse, würden die Lichtverhältnisse am Breitenkreis der Breite θ so aussehen:



Mit Hilfe dieser beiden Abbildungen, können Sie – zunächst für die Nordhalbkugel – den Winkel $\alpha(\theta)$ in Abhängigkeit von θ (und θ_0) ausdrücken. Daraus erhalten Sie die Formel für $S(\theta)$ für $0 \leq \theta \leq \theta_0$. Mittels eines Symmetriearguments können Sie die Formel auf die Südhalbkugel, d.h. für $-\theta_0 \leq \theta \leq 0$, ausdehnen.