Übungen zur Vorlesung „Mathematik I für Studierende des Ingenieurwesens und der Informatik“ im Wintersemester 2010/11 bei Prof. Dr. V. Bangert

Blatt 05 15.11.2010

1. *(4 Punkte)* Verwenden Sie die Additionstheoreme für Sinus und Cosinus, um

$$(a) \quad \sin 2x, \qquad\qquad (b) \quad \cos 2x,$$

als Funktionen von $\sin x$, $\sin y$, $\cos x$, $\cos y$ darzustellen, und um

$$(c) \quad \tan(x+y)$$

als Funktion in $\tan x$ und $\tan y$ darzustellen.

2. *(4 Punkte)*

(a) Schreiben Sie die komplexen Zahlen

$$(i-1)^{13} \qquad \text{und} \qquad \left(\frac{i\sqrt{3}-1}{i\sqrt{3}+1}\right)^{23}$$

jeweils in der Form $a+ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Anwesenheitsaufgabe 2 ist hilfreich.

(b) Skizzieren Sie die folgenden Punktmengen in $\mathbb{C}$:

$$\{z \in \mathbb{C} \big| |z-i-1| \leq 2\}, \qquad \{z \in \mathbb{C} \big| z = te^{it},\, 0 \leq t \leq 4\pi\}, \qquad \{z \in \mathbb{C} \big| |\mathrm{Im}(z^2)| \leq 2\}$$

3. *(4 Punkte)* Die Summe der beiden gleichfrequenten Schwingungen

$$s(t) := \sin(\omega t + \varphi_1) \ + \ 2\sin \omega t$$

lässt sich nach der Vorlesung darstellen als

$$s(t) = A \sin(\omega t + \varphi).$$

Berechnen Sie Amplitude A und Nullphase φ dieser Schwingung für $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$ (mit dem Taschenrechner). Für welche Werte von φ_1 ist A maximal bzw. minimal? Wie groß/klein ist A dann?

4. *(4 Punkte) Längster Tag im Jahr.* Zeigen Sie: Bei Sommersonnenwende ist die Sonnenscheindauer (in Stunden) in einem Ort der geographischen Breite θ mit $|\theta| \leq \theta_0$ höchstens

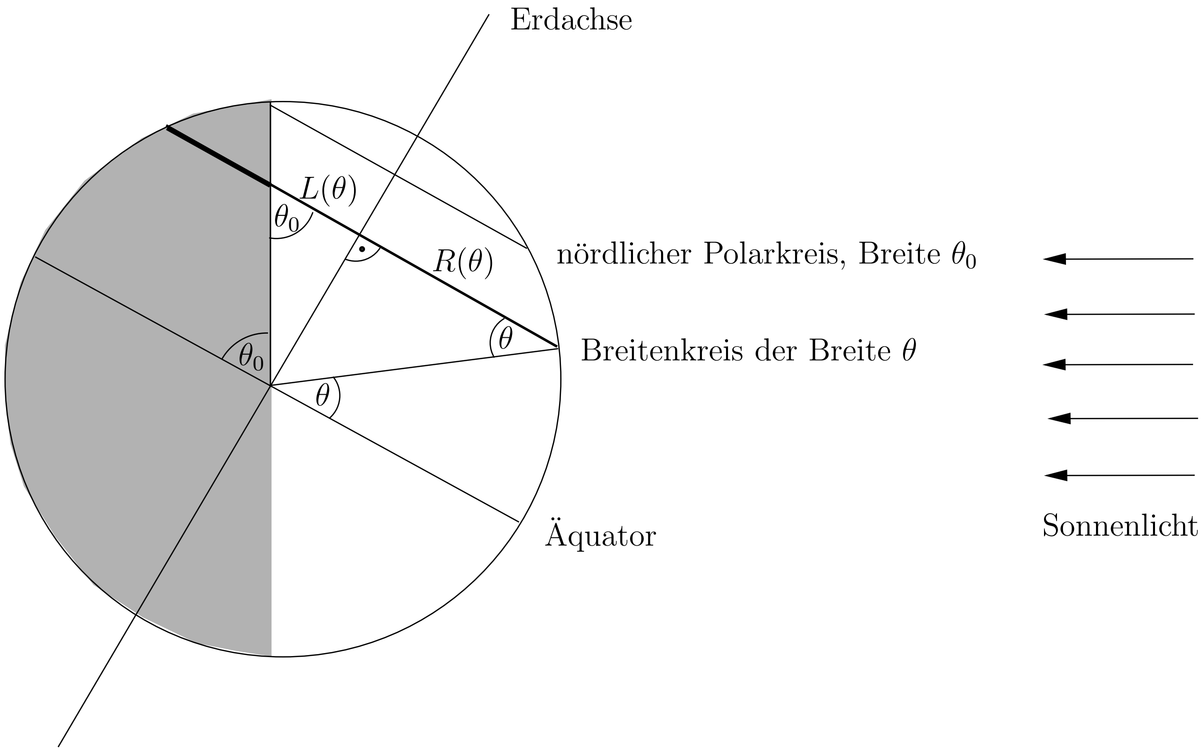
$$S(\theta) = 12\left(1 + \frac{2}{\pi}\arcsin\left(\frac{\tan\theta}{\tan\theta_0}\right)\right).$$

Dabei ist $\theta_0 = 66°30'$ die geographische Breite des nördlichen Polarkreises. *Auf der Rückseite gibt es dazu eine Anleitung.* Wie lang ist der längste Tag in Freiburg ($\theta = 48°$)?

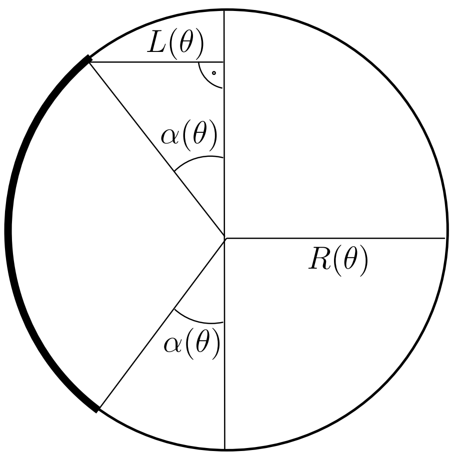
Abgabe: Montag, 22.11.2010, vor der Vorlesung

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt

Anleitung zu Aufgabe 4:
Zur Zeit der Sommersonnenwende ergibt sich das folgende Bild:



Dabei zeigt die stärker gezogene Linie den lichtabgewandten Bogen des Breitenkreises der Breite θ. Blickte man in Richtung der Erdachse, würden die Lichtverhältnisse am Breitenkreis der Breite θ so aussehen:



Mit Hilfe dieser beiden Abbildungen, können Sie – zunächst für die Nordhalbkugel – den Winkel $\alpha(\theta)$ in Abhängigkeit von θ (und θ_0) ausdrücken. Daraus erhalten Sie die Formel für $S(\theta)$ für $0 \leq \theta \leq \theta_0$. Mittels eines Symmetriearguments können Sie die Formel auf die Südhalbkugel, d.h. für $-\theta_0 \leq \theta \leq 0$, ausdehnen.