Übungen zur Vorlesung „Mathematik I für Studierende des Ingenieurwesens und der Informatik“ im Wintersemester 2010/11 bei Prof. Dr. V. Bangert

Blatt 06 22.11.2010

1. Gegeben seien zwei harmonische Schwingungen
$$s_1(t) = \cos(\omega_1 t + \alpha_1), \quad s_2(t) = \cos(\omega_2 t + \alpha_2)$$
derselben Amplitude, aber möglicherweise verschiedener Frequenzen und Phasen.

   (a) Zeigen Sie, dass sich ihre Überlagerung $s(t) := s_1(t) + s_2(t)$ in der Form
   $$s(t) = \underbrace{2\cos(\delta t + b)}_{=:A(t)} \cos(\sigma t + a)$$
   mit modulierter Amplitude $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ schreiben lässt. Dabei ist
   $$\sigma = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}, \quad \delta = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}, \quad a = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}, \quad b = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}.$$

   (b) Plotten (etwa mit wxMaxima, `http://wxmaxima.sourceforge.net`) oder skizzieren Sie die Graphen von $s(t)$ sowie $A(t)$ und $-A(t)$ in ein gemeinsames Schaubild, und zwar für die Werte $\omega_1 = 2\pi \cdot 200$, $\omega_2 = 2\pi \cdot 280$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ und $t \in [0, 1/40]$.

   (c) Anwendung: Zwei Flötisten spielen gleichzeitig Töne der Frequenzen $\nu_1 = 440$ Hertz (eingestrichenes a) und $\nu_2 = 442$ Hertz (1/20 Ganzton höher). Man hört dann einen Ton $s(t)$ der Frequenz $\nu = \sigma/2\pi$ mit modulierter Amplitude $A(t)$ (Schwebung). Die Frequenz der Amplitudenmodulation ist gegeben als $\nu_A := 1/T$, wobei T die Zeit zwischen zwei Nulldurchgängen von A ist. Berechnen Sie ν und ν_A.

2. Welche der Folgen sind konvergent, welche divergent? Begründen Sie ihre Antwort und geben Sie gegebenenfalls den Grenzwert an.
$$a_n = \frac{n^4 + 4n^3 + 1}{n^5 + 2}, \qquad b_n = \frac{(n-1)^3}{n^3 + 2n^2 + 1}, \qquad c_n = \frac{(n-7)^3}{n^2 + 10n + 5}$$

3. Welche der Folgen sind konvergent, welche divergent? Begründen Sie ihre Antwort und geben Sie gegebenenfalls die Grenzwerte an.
$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \quad (n \geq 1), \qquad b_n = \frac{1^2 + 2^2 + \ldots + n^2}{n^2} \quad (n \geq 1).$$
Hinweis zu (b_n): Für $n = 2k$ können Sie den Zähler abschätzen durch
$$1^2 + 2^2 + \ldots + (2k)^2 \geq k^2 + \ldots + (2k)^2 \geq k \cdot k^2.$$

4. Berechnen Sie den Grenzwert der rekursiv definierten Folge
$$a_{n+1} := \sqrt{1 + a_n}, \quad a_0 := 1.$$
Verwenden Sie Anwesenheitsaufgabe 2: Überlegen Sie sich zunächst, dass die Folge monoton wachsend und beschränkt ist. Zeigen Sie dann, dass ihr Grenzwert $a := \lim_{n\to\infty} a_n$ der Gleichung $a = \sqrt{1 + a}$ genügt, und geben Sie a an.

Abgabe: Montag, 29.11.2010, vor der Vorlesung

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt

Anwesenheitsaufgaben zur Vorlesung „Mathematik I für Studierende des Ingenieurwesens und der Informatik“ im Wintersemester 2010/11 bei Prof. Dr. V. Bangert

Blatt 06 22.11.2010

---

1. Welche der Folgen sind konvergent, welche divergent? Begründen Sie ihre Antwort und geben Sie gegebenenfalls den Grenzwert an.

$$a_n = \frac{n^2 - 3n + 1}{n^3}, \qquad b_n = \frac{(n+2)^3}{4n^2 + 1}, \qquad c_n = \frac{-n^4 + 2n^3 - 3n}{(n+2)^2}$$

2. Zeigen Sie (mittels quadratischer Ergänzung): Für nichtnegative reelle Zahlen x gilt

$$x \leq \sqrt{1+x} \quad \Longleftrightarrow \quad x \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

und $x = \sqrt{1+x}$ nur für $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Mit der Monotonie von $x \mapsto \sqrt{1+x}$ folgern Sie hieraus

$$0 \leq x \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \Longrightarrow \quad x \leq \sqrt{1+x} \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Anmerkung: Anders ausgedrückt besagt dies, dass die Funktion

$$f : [0, \frac{1+\sqrt{5}}{2}] \to [0, \frac{1+\sqrt{5}}{2}], \quad x \mapsto \sqrt{1+x}$$

der Ungleichung $f(x) \geq x$ genügt, und dass die Fixpunktmenge $\mathrm{Fix}(f)$ von f gegeben ist durch $\mathrm{Fix}(f) := \{x \in \mathrm{D}_f \mid f(x) = x\} = \{\frac{1+\sqrt{5}}{2}\}$.