Übungen zur Vorlesung „Mathematik I für Studierende des Ingenieurwesens und der Informatik“ im Wintersemester 2010/11 bei Prof. Dr. V. Bangert

Blatt 07 29.11.2010

1. *g-al-Entwicklung:* Seien eine natürliche Zahl $g \geq 2$ und eine reelle Zahl $a \in]0,1[$ gegeben. Zu a definieren wir rekursiv eine Folge $a_1, a_2, \cdots$ (die „g-al-Stellen von a“) durch

$$a_1 = \max\{k \mid k \in \{0,1,\ldots,g-1\} \text{ und } \frac{k}{g} \leq a\} \quad \text{und}$$
$$a_{n+1} = \max\left\{k \mid k \in \{0,1,\ldots,g-1\} \text{ und } \frac{a_1}{g} + \frac{a_2}{g^2} + \cdots + \frac{a_n}{g^n} + \frac{k}{g^{n+1}} \leq a\right\}$$

Zeigen Sie:

(a) Es gilt $a = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{g^k}$, $\left(\text{d.h. } a = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{g^k}\right)$

Anleitung: Überlegen Sie sich, dass $\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{g^k} \leq a < \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{g^k} + \frac{1}{g^n}$ gilt.

(b) Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit $a_n < g-1$. (Hinweis: Es ist $a \in]0,1[$ vorausgesetzt.)

(c) Es gibt kein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n > n_0$ gilt: $a_n = g-1$. (D.h. die wie oben definierte g-al-Entwicklung ist nie von der Form $a = 0,a_1a_2\ldots a_{n_0}\overline{x} = 0,a_1a_2\ldots a_{n_0}xxxxxx\cdots$ mit $x = g-1$.)

2. *Exponentielles Wachstum:* Nach einem bekannten Märchen wollte ein persischer Höfling für die Erfindung des Schachbretts folgendermaßen belohnt werden: Ein Reiskorn wollte er für das erste Feld des Schachbretts, 2 für das zweite Feld, 4 für das dritte, 8 für das vierte, usw. Er wollte also für jedes weitere Schachbrettfeld doppelt so viele Reiskörner wie für das vorhergehende.

(a) Wie viele Reiskörner sind das ingesamt?

(b) Die Gesamtfläche von Deutschland beträgt $357111\,\mathrm{km}^2$. Nehmen Sie an, dass Deutschland gleichmäßig mit den Reiskörnern vom Schachbrett (Nehmen Sie an, dass $1\,\mathrm{dm}^3$ Reis 25000 Reiskörner enthält.) bedeckt wird. Wie hoch ist die Schicht?

3. Zeigen Sie, dass $\lim_{x\to 0^+} e^x = 1$.

Hinweis: Nutzen sie zunächst für gegebenes $\varepsilon > 0$ Anwesenheitsaufgabe 2, um die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ so in eine endliche Summe und eine Reihe $\sum_{k=l}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ zu zerlegen, dass die Reihe $\sum_{k=l}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ für alle $x \in [0,1]$ gleichmäßig durch $\frac{\varepsilon}{2}$ abgeschätzt werden kann.

4. *Stetige Funktionen*

(a) Seien $a < b < c$ und $f :]a,b] \to \mathbb{R}$, $g : [b,c[\to \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit $f(b) = g(b)$.

Zeigen Sie, dass die Funktion $h :]a,c[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} f(x), & \text{falls } x \in]a,b] \\ g(x), & \text{falls } x \in]b,c[\end{cases}$, stetig ist.

(b) Betrachten Sie die Steuerkurve aus Aufgabe 1, Blatt 3. Zeigen Sie, dass diese Funktion stetig ist.

Abgabe: Montag, 6.12.2010, vor der Vorlesung

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt

Anwesenheitsaufgaben zur Vorlesung „Mathematik I für Studierende des Ingenieurwesens und der Informatik“ im Wintersemester 2010/11 bei Prof. Dr. V. Bangert

Blatt 07 29.11.2010

---

1. *Dezimal-Entwicklung* Sei eine reelle Zahl $a \in]0,1[$ gegeben. Zu a definieren wir rekursiv eine Folge $a_1, a_2, \cdots$ (die „Dezimalstellen von a “) durch

$$a_1 = \max\left\{k \mid k \in \{0,1,\dots,9\} \text{ und } \frac{k}{10} \leq a\right\} \qquad \text{und}$$

$$a_{n+1} = \max\left\{k \mid k \in \{0,1,\dots,9\} \text{ und } \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} + \frac{k}{10^{n+1}} \leq a\right\}$$

   Zeigen Sie: Es gilt $a = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{10^k}$, $\left(\text{d.h. } a = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{10^k}\right)$

   Anleitung: Überlegen Sie sich, dass $\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{10^k} \leq a < \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{10^k} + \frac{1}{10^n}$ gilt.

2. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Zeigen Sie: Es existiert ein $l \in \mathbb{N}$, so dass für alle $0 \leq x \leq 1$ gilt:

$$\sum_{k=l}^{\infty} \frac{x^k}{k!} < \varepsilon.$$