Übungen zur Vorlesung „Mathematik I für Studierende des Ingenieurwesens und der Informatik“ im Wintersemester 2010/11 bei Prof. Dr. V. Bangert

Blatt 08 6.12.2010

1. *Eigenschaften der Exponentialfunktion: (8 Punkte)*

   (a) Zeigen Sie mittels der Definition der Exponentialfunktion, dass für $x \geq 0$ gilt:
   $$\exp(x) \geq 1 + x.$$

   (b) Zeigen Sie mittels Anw.-A. 1 und Aufgabenteil a), dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $\exp(x) > 0$.

   (c) Zeigen Sie mit Hilfe von Aufgabenteil a) und der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion, dass
   $$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0 \qquad \text{und} \qquad \lim_{x \to \infty} e^x = \infty.$$

   (d) Zeigen Sie mittels der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion, dass $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ streng monoton wächst.

   (e) Zeigen Sie mittels der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion und Anwesenheitsaufgabe 1, dass $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ stetig ist.

   (f) Zeigen Sie: Zu jedem $y \in \mathbb{R}_{>0}$ existiert genau ein $x \in \mathbb{R}$, so dass $\exp(x) = y$.

   (g) Zeigen Sie, dass die Exponentialfunktion schneller wächst als jede Potenz von x, d.h.
   $$\text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ gilt } \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty.$$
   Hinweis: Zeigen Sie mittels der Definition der Exponentialfunktion, dass für $x > 0$:
   $$\exp(x) \geq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

2. Berechnen Sie die Ableitungen folgender Funktionen:

   (a) $f_1 : \mathbb{R} \setminus \{4 - \sqrt{17}, 4 + \sqrt{17}\} \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = \frac{x^3 - 2x + 2}{x^2 + 8x - 1}$

   (b) $f_2 : \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \to \mathbb{R}$, $f_2(x) = \frac{\cos^2(\sin(x)) - x}{x^2 - 1}$

   (c) $f_3 : \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$, $f_3(x) = \tan(x)$

   (d) $f_4 : \mathbb{R} \setminus \{(k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$, $f_4(x) = \cot(x)$

   Hinweis: Benützen Sie in Aufgabenteil c) und d) die Definition $\tan = \frac{\sin}{\cos}$ bzw. $\cot = \frac{\cos}{\sin}$ und die Quotientenregel zur Berechnung der Ableitung.

3. *Bisektionsverfahren*

   Betrachten Sie die Funktion $f(x) = x^5 + x - 1$. Zeigen Sie zunächst, dass f eine Nullstelle im Intervall $[0, 1]$ besitzt. Nutzen Sie dann das Intervallhalbierungsverfahren, um die Nullstelle auf $\frac{1}{2^6}$ genau zu approximieren. Führen Sie also 6 Iterationen aus beginnend mit $a_0 = 0$ und $b_0 = 1$. Geben Sie auch $a_1, a_2, \ldots, a_6$ und $b_1, b_2, \ldots, b_6$ an. Sie können zur Berechnung einen Computer benutzen.

Abgabe: Montag, 13.12.2010, vor der Vorlesung

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt

Anwesenheitsaufgaben zur Vorlesung „Mathematik I für Studierende des Ingenieurwesens und der Informatik“ im Wintersemester 2010/11 bei Prof. Dr. V. Bangert

Blatt 08 6.12.2010

1. *Stetigkeit der Exponentialfunktion*

   (a) Zeigen Sie mittels der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$.

   (b) Zeigen Sie mit Aufgabe 3, Blatt 7, und Aufgabenteil a), dass die Exponentialfunktion an der Stelle 0 stetig ist.

2. Zeigen Sie, dass $\cos : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ stetig ist.

   Folgern sie, dass auch $\sin : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ stetig ist.

   Hinweis: Benutzen Sie, dass die Länge eines Kreisbogensegments größer ist als der Abstand der Endpunkte des Kreissegments.