Übungen zur Vorlesung „Mathematik I für Studierende des Ingenieurwesens und der Informatik“ im Wintersemester 2010/11 bei Prof. Dr. V. Bangert

Blatt 09 13.12.2010

---

1. *Zum Vertauschen von Grenzwerten (2 Punkte):* Oft treten in der Mathematik Doppelfolgen $\{a_{n\,m}\}_{n,m\in\mathbb{N}}$ auf. Ein Beispiel dafür ist der Beweis der Stetigkeit der Exponentialfunktion (vgl. Blatt 7, Aufg.3).

   Betrachten Sie folgendes Beispiel: $a_{n\,m} = \frac{m-n}{m+n}$.

   Bestimmen Sie die Grenzwerte

   $$\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} a_{n\,m} \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} a_{n\,m}.$$

   Was schließen Sie daraus für die Vertauschbarkeit von Grenzwertprozessen?

2. Betrachten Sie die Funktion $f(x) = \cos x + \sin x$ auf dem Intervall $[0, 2\pi]$. Bestimmen Sie Nullstellen, Minima, Maxima und Wendepunkte. Wo ist die Funktion monoton wachsend bzw. fallend? Wo ist die Funktion konvex bzw. konkav? Skizzieren Sie den Graphen der Funktion.

3. Ein hungriger Wanderer steht diesseits eines Flusses der Breite b und der Strömungsgeschwindigkeit u; ihm genau gegenüber befindet sich jenseits des Flusses der Eingang eines Wirtshauses. Der Wanderer, dessen Schwimmgeschwindigkeit v und dessen Gehgeschwindigkeit w beträgt, möchte in möglichst kurzer Zeit den Eingang des Wirtshauses erreichen. Wie muss er losschwimmen?

   Hinweis: Beachten Sie, dass die Funktion, die dem Winkel, mit dem der Schwimmer los schwimmt, die Zeit, die er bis zum Gasthaus braucht, zuordnet, stückweise definiert werden muss, falls $u \leq v$ gilt.

4. Betrachten Sie die Funktion

   $$g(x) = \begin{cases} (x+3)^2 & ,\ \text{falls } x \leq 0 \\ 4\sin(ax) + b & ,\ \text{falls } x > 0 \end{cases}$$

   Bestimmen Sie $a, b \in \mathbb{R}$ so, dass die Funktion g auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar ist.

5. *(2 Punkte):* Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, so dass gilt:

   $$f' = \alpha f.$$

   Zeigen Sie: Es existiert ein $C \in \mathbb{R}$, so dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $f(x) = C \cdot e^{\alpha x}$.

   Hinweis: Berechnen Sie $\left(\frac{f}{e^{\alpha x}}\right)'$.

Abgabe: Montag, 20.12.2010, vor der Vorlesung

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt

Anwesenheitsaufgaben zur Vorlesung „Mathematik I für Studierende des Ingenieurwesens und der Informatik“ im Wintersemester 2010/11 bei Prof. Dr. V. Bangert

Blatt 09 13.12.2010

1. Betrachten Sie die Funktion $h(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$. Bestimmen Sie Nullstellen, Maxima, Minima und Wendepunkte. Wo ist die Funktion monoton wachsend bzw. fallend? Wo ist die Funktion konvex bzw. konkav? Skizzieren Sie den Graphen der Funktion.

2. Bestimmen Sie unter den Rechtecken mit Umfang $s > 0$ dasjenige mit dem größten Flächeninhalt.