Übungen zur Vorlesung „Mathematik I für Studierende des Ingenieurwesens und der Informatik“ im Wintersemester 2010/11 bei Prof. Dr. V. Bangert

Musterlösung zu Blatt 15 14.02.2011

1. *Inverse Matrix:* Das LGS hat folgende Matrixform:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & a \\ 0 & -1 & 1 & b \\ 2 & 1 & 1 & c \end{array}\right)$$

Mit dem Gaußverfahren berechnen wir nun:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & a \\ 0 & -1 & 1 & b \\ 2 & 1 & 1 & c \end{array}\right) \cdot(-2)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & a \\ 0 & -1 & 1 & b \\ 0 & -3 & 1 & c-2a \end{array}\right) \cdot(-3)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & a \\ 0 & -1 & 1 & b \\ 0 & 0 & -2 & c-2a-3b \end{array}\right)$$

Wir erhalten nun folgende Gleichungssysteme:

(a) Setze $(a,b,c) = e_1 = (1,0,0)$. Dann folgt $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right)$

Also gilt

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 1 \\ -x_2 + x_3 &= 0 \\ -2x_3 &= -2 \end{aligned}$$

Es folgt $x_3 = 1$, $x_2 = 1$ und $x_1 = -1$.

(b) Setze $(a,b,c) = e_2 = (0,1,0)$. Dann folgt $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \end{array}\right)$

Also gilt

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 0 \\ -x_2 + x_3 &= 1 \\ -2x_3 &= -3 \end{aligned}$$

Es folgt $x_3 = \frac{3}{2}$, $x_2 = \frac{1}{2}$ und $x_1 = -1$.

(c) Setze $(a,b,c) = e_3 = (0,0,1)$. Dann folgt $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right)$

Also gilt

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 0 \\ -x_2 + x_3 &= 0 \\ -2x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Es folgt $x_3 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = -\frac{1}{2}$ und $x_1 = 1$.

Bemerkung: Man kann das Gaußverfahren auch fogendermaßen fortsetzen, um die inverse Matrix zu berechnen: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & a \\ 0 & -1 & 0 & -a - \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c \\ 0 & 0 & -2 & c - 2a - 3b \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \cdot 2 \\ \\ \end{array}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -a - b + c \\ 0 & -1 & 0 & -a - \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c \\ 0 & 0 & -2 & c - 2a - 3b \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot(-1) \\ \cdot(-\frac{1}{2}) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -a - b + c \\ 0 & 1 & 0 & a + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c \\ 0 & 0 & 1 & a + \frac{3}{2}b - \frac{1}{2}c \end{array}\right)$$

Somit ist die zu $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ inverse Matrix gegeben durch $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

2. Bezeichne $v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $v_2 := \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $v_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v_4(a) := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \\ -1 \end{pmatrix}$.

   Zur Prüfung der Linearen Unabhängigkeit betrachten wir folgendes homogene LGS

   $$\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 + \delta v_4(a) = 0.$$

   In Matrixform hat dieses LGS folgende Gestalt:

   $$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & a & 0 \\ -2 & -2 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

   Mit dem Gaußverfahren berechnet man:

   $$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & a & 0 \\ -2 & -2 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot(-4)\ \cdot(-2)\ \cdot 2 \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & a-2 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad \cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right) \quad \cdot\tfrac{1}{2}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & a-\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{array}\right) \quad \cdot\tfrac{1}{3}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & a-\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3}a-\frac{2}{3} & 0 \end{array}\right)$$

Nach Folgerung (5.1.15) c) bestitzt das homogene LGS genau dann nur die Lösung $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$, wenn $a \neq 2$, d.h die Vektoren v_1, v_2, v_3, $v_4(2)$ sind linear abhängig und für alle $a \neq 2$ sind die Vektoren v_1, v_2, v_3, $v_4(a)$ linear unabhängig.

3.

$$\begin{pmatrix} 3+i & i & 0 \\ 1 & 8 & 3 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & i \\ 3-2i & 0 \\ 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13-2i & 3i-1 \\ 22-16i & i+3\sqrt{2} \\ -17+4i & 3i+4\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2-i \\ -2+3i & 1 & i \\ -3i & 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i & 0 & \sqrt{3}i \\ 1 & 5 & -2 \\ \sqrt{5} & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &\qquad = \begin{pmatrix} 2(\sqrt{5}-1)-i(3+\sqrt{5}) & -8-i & 4+3\sqrt{3}i \\ 4+(2+\sqrt{5})i & 5+i & -2-3\sqrt{3}-2\sqrt{3}i \\ -2-\sqrt{5}i & 5-i & 3\sqrt{3}-2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$