Vorlesung am 09.02.2011

(5.3.2) Def.:

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

heißt die $(n \times n)$-Einheitsmatrix, d.h. $E_n = (\delta_{ij})_{1\le i,j\le n}$ mit

$$\delta_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{falls } i \neq j \end{cases}$$

(5.3.3) Rechenregeln. Für alle A, A_1, $A_2 \in \mathbb{R}^{m\times n}$, B, B_1, $B_2 \in \mathbb{R}^{n\times r}$, $C \in \mathbb{R}^{r\times s}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt:

(a) $E_m A = A E_n = A$

(b) $(A_1 + A_2)B = A_1 B + A_2 B$, $A(B_1 + B_2) = AB_1 + AB_2$

(c) $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$.

(d) $A(BC) = (AB)C$

Bem.: 1) In vielen Fällen stellt sich die Frage nach der Kommutativität des Produktes von Matrizen nicht. Für $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times r}$ ist AB definiert, aber BA nur, wenn $r = m$. Ist $r = m$, so ist $BA \in \mathbb{R}^{m\times m}$. Für $r = m \neq n$ sind die Zeilen (=Spalten)zahlen von AB und BA verschieden, so dass AB und BA nicht gleich sein können. Aber auch wenn $r = m = n$ gilt, können AB und BA verschieden sein:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

2) Im Gegensatz zur Multiplikation von reellen Zahlen folgt beim Produkt von Matrizen aus $AB = 0$ nicht notwendig $A = 0$ oder $B = 0$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(5.3.4) Def. Eine (quadratische) Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt regulär (oder invertierbar), wenn $\operatorname{rang}(A) = n$ gilt.

(5.3.5) Satz. Für alle $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt:

(a) A ist genau dann regulär, wenn ein $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ existiert, für das $AB = BA = E_n$ gilt.

(b) Ist A regulär, so existiert nur ein $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, für das $AB = BA = E_n$ gilt. Dieses B heißt die zu A inverse Matrix und wird mit A^{-1} bezeichnet.

(c) Sind A, $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und gilt $AB = E_n$ oder $BA = E_n$, so ist A regulär und es gilt $B = A^{-1}$.

Bew.: (a) Ist A regulär, so existiert nach (5.2.11) für $1 \le i \le n$ eine Lösung $s_i \in \mathbb{R}^n$ des linearen Gleichungssystems (LGS)

$$As_i = e_i.$$

Sei $B = (s_1 \dots s_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die Matrix mit den Spaltenvektoren $s_1, \dots, s_n$. Dann gilt für $1 \leq i \leq n$:

$$(AB)e_i = As_i = e_i,$$

und das ist gleichbedeutend mit $AB = E_n$.

Nun zeigen wir, dass aus $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $AB = E_n$ folgt, dass auch $BA = E_n$ gilt: Aus $AB = E_n$ folgt, dass für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt: $A(Bx) = x$. Daraus folgt, dass $Bx \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Nach (5.2.11) existiert dann für jedes $y \in \mathbb{R}^n$ eine Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ des *LGS*

$$Bx = y.$$

Dann gilt für jedes $y \in \mathbb{R}^n$

$$(BA)y = BA(Bx) = B(ABx) = B(E_n x) = Bx = y,$$

und damit $BA = E_n$.

Sei umgekehrt vorausgesetzt, dass $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $AB = E_n$ gilt. Wir zeigen, dass daraus $\operatorname{rang}(A) = n$ folgt:
Für jedes $y \in \mathbb{R}^n$ existiert dann eine Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ des *LGS*

$$Ax = y,$$

nämlich $x := By$. Aus (5.2.11) folgt dann $\operatorname{rang}(A) = n$.

(b) Gilt $A, B, \tilde{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $BA = E_n$ und $A\tilde{B} = E_n$, so folgt

$$B = BE_n = B(A\tilde{B}) = (BA)\tilde{B} = E_n\tilde{B} = \tilde{B}.$$

(c) Im Beweis von (a) wurde gezeigt, dass aus $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $AB = E_n$ folgt, dass auch $BA = E_n$ gilt und dass A regulär ist. Aus (b) folgt dann, dass $B = A^{-1}$ gilt.

Bem.: 1) Der Beweis von (5.3.5)(a) liefert eine Möglichkeit A^{-1} zu berechnen: Wir lösen für $1 \leq i \leq n$ das *LGS*

$$As_i = e_i.$$

Dann ist A^{-1} die Matrix mit den Spaltenvektoren $s_1, \dots, s_n$:

$$A = (s_1 \dots s_n)$$

2) Ist $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ regulär und $b \in \mathbb{R}^n$, so besitzt nach (5.2.11) das *LGS*

$$Ax = b$$

genau eine Lösung $x \in \mathbb{R}^n$. Sie ist durch

$$x = A^{-1}b$$

gegeben. Denn: $Ax = A(A^{-1}b) = (AA^{-1})b = E_n b = b$.

Weiterführende Bemerkung: Die regulären $(n \times n)$-Matrizen mit der Multiplikation von Matrizen bilden eine "Gruppe", genannt die allgemeine lineare Gruppe $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. Das heißt einfach, dass für alle $A, B, C \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ folgende, uns schon bekannte, Regeln (hier "Gruppenaxiome" genannt) gelten:

(G_1) $A(BC) = (AB)C$

(G_2) $AE_n = E_n A = A$

(G_3) Für jedes $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ existiert ein Element $A^{-1} \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, für das $AA^{-1} = A^{-1}A = E_n$ gilt.

5.4 Die Determinante

ordnet jeder quadratischen Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine reelle Zahl $\det A$ zu, und zwar so, dass folgende ausserordentlich nützliche Eigenschaften erfüllt sind:

(5.4.1) $\det A \neq 0 \Leftrightarrow A$ regulär

(5.4.2) Für alle $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt: $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.

Aus (5.4.1) und (5.4.2) folgen

(5.4.3) $\det E_n = 1$

(5.4.4) Ist $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ regulär, so gilt $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$

Beispiele: 1) Der "triviale" Fall ist, dass $n = 1$ gilt. Ein $A \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$ hat nur einen Koeffizienten, $A = (a_{11})$, und es gilt dann einfach

$$\det A = a_{11}$$

2) Für $n = 2$ gilt:

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

Hier sind (5.4.1) und (5.4.2) leicht nachprüfbar. Ist $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ und $\det A \neq 0$, so gilt

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \qquad \text{(Nachrechnen!)}$$

(vgl. Bsp. 3 in 5.1).

Für beliebiges $n > 1$ kann man $\det A$ rekursiv definieren durch:

(5.4.5) Def.: Sei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $n > 1$. Für $1 \leq i \leq n$ bezeichne $A_{i1} \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$ die $(n-1) \times (n-1)$-Matrix, die aus A durch Entfernen der 1. Spalte und der i'ten Zeile entsteht.
Wir definieren:

$$\det A = a_{11} \det A_{11} - a_{21} \det A_{21} + \ldots + (-1)^{n-1} a_{n1} \det A_{n1}.$$

Bsp. (für $n = 3$):

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} &= 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} - 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} + 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \\ &= (15 - 16) - 2(10 - 12) + 1 \cdot (8 - 9) = 2 \end{aligned}$$

Es ist (insbesondere für die mehrdimensionale Integration) wichtig, dass die Determinante etwas mit dem Begriff des n-dimensionalen Volumens zu tun hat.

Für $n = 2$: Zur Matrix $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ mit den Spaltenvektoren $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ betrachten wir das von den Vektoren $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^2$ aufgespannte Parallelogramm

$$P = \left\{ s \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \mid 0 \leq s \leq 1, 0 \leq t \leq 1 \right\}$$

Dann ist die Fläche von P gerade $\left|\det\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\right| = |ad - bc|$.

Bsp.: Wir betrachten die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Dann gilt $\det\begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & d \end{pmatrix} = d$.

P ist dann ein Parallelogramm, dessen eine Seitenlänge 1 und dessen zugehörige Höhe $|d|$ ist. Also hat P die Fläche $1 \cdot |d| = \left|\det\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\right|$

Für $n = 3$: $A = (v_1 v_2 v_3) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ habe die Spaltenvektoren $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$. Man nennt

$$P = \{t_1 v_1 + t_2 v_2 + t_3 v_3 \mid 0 \le t_1 \le 1, 0 \le t_2 \le 1, 0 \le t_3 \le 1\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

den von $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ aufgespannten Spat. Für sein 3-dimensionales Volumen $\mathrm{vol}_3(P)$ gilt:

$$\mathrm{vol}_3(P) = |\det A|$$

Bem.: Man sieht daran: $\mathrm{vol}_3(P) = 0 \Leftrightarrow v_1, v_2, v_3$ sind linear abhängig $\Leftrightarrow P$ ist in einer Ebene des $\mathbb{R}^3$ enthalten.

Allgemeines $n \in \mathbb{N}$: Man ordnet n Vektoren $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ einerseits das "Parallelotop"

$$P = \left\{\sum_{i=1}^{n} t_i v_i \mid 0 \le t_i \le 1 \text{ für } 1 \le i \le n\right\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

und andererseits die Matrix $A = (v_1 \dots v_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit den Spaltenvektoren $v_1, \dots, v_n$ zu. Dann ist das n-dimensionale Volumen $\mathrm{vol}_n(P)$ von P definiert durch:

$$\mathrm{vol}_n(P) := |\det A|$$

Bem.: Wegen $Ae_i = v_i$ bildet A den "Einheitswürfel"

$$W = \left\{\sum_{i=1}^{n} t_i e_i \mid 0 \le t_i \le 1 \text{ für } 1 \le i \le n\right\}$$

auf P ab. Wir haben $\mathrm{vol}_n(W) = |\det E_n| = 1$ und $\mathrm{vol}_n(P) = |\det A|$, d.h. $|\det A|$ kann als die "Volumenverzerrung" der linearen Abbildung A interpretiert werden.

Will man $\det A$ für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ nach Def. (5.4.5) berechnen, so benötigt man im Allgemeinen $n!$ Multiplikationen. Da $n!$ unglaublich schnell mit n wächst, ist das (auch für Computer) sehr bald nicht mehr durchführbar. Auch bei dem Problem, $\det A$ für größeres $n \in \mathbb{N}$ zu berechnen, kann das Gaußsche Eliminationsverfahren eingesetzt werden. Dazu einige Vorüberlegungen, die auch für sich genommen wichtig sind.

(5.4.6) Def. Eine Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt obere Dreiecksmatrix, falls für alle $i > j$ gilt: $a_{ij} = 0$.

Bsp.: Ist $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ in Zeilenstufenform, so ist M obere Dreiecksmatrix.

(5.4.7) Satz: Ist $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ obere Dreiecksmatrix, so gilt

$$\det A = a_{11} \cdot \ldots \cdot a_{nn} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Bew.: Wegen $a_{21} = a_{31} = \ldots = a_{n1} = 0$ reduziert sich die Formel in (5.4.5) auf $\det A = a_{11} \det A_{11}$, wobei A_{11} obere Dreiecksmatrix ist und Diagonalelemente $a_{22}, \dots, a_{nn}$ hat. Deshalb kann man die gleiche Überlegung auf A_{11} anwenden und erhält nach n Schritten die Behauptung

(5.4.8) Satz

(a) Die Matrix $\tilde{A}$ entstehe aus $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ durch Vertauschung der i'ten und j'ten Zeilen $(i \neq j)$. Dann gilt $\det \tilde{A} = -\det A$.

(b) $\det A$ ist linear als Funktion jedes Zeilenvektors, d.h.: Ist $i \in \{1,\dots,n\}$ und sind $z_1,\dots,z_i,\tilde{z}_i,z_{i+1},\dots,z_n \in \mathbb{R}_n$ und $\alpha \in \mathbb{R}$, so gilt

$$\det\begin{pmatrix} z_1\\ \vdots\\ \alpha z_i\\ \vdots\\ z_n\end{pmatrix} = \alpha\det\begin{pmatrix} z_1\\ \vdots\\ z_i\\ \vdots\\ z_n\end{pmatrix}, \det\begin{pmatrix} z_1\\ \vdots\\ z_i+\tilde{z}_i\\ \vdots\\ z_n\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} z_1\\ \vdots\\ z_i\\ \vdots\\ z_n\end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} z_1\\ \vdots\\ \tilde{z}_i\\ \vdots\\ z_n\end{pmatrix}$$

Bem.: Satz (5.4.7) gilt entsprechend für Spalten- statt Zeilenvektoren.

Bew.: Das folgt leicht aus (5.4.1) und (5.4.2) oder aus (5.4.5).

Speziell folgt aus (a), dass $\det A = 0$ ist, falls zwei Zeilen von A gleich sind. Mit (b) folgt dann, dass sich die Determinante nicht ändert, wenn man zu einer Zeile von A ein Vielfaches einer anderen Zeile von A addiert. Wendet man das Gaußsche Eliminationsverfahren auf A an, so ändert die Determinante nur bei Zeilenvertauschung ihr Vorzeichen, während sie sonst gleich bleibt. Ist M das Endergebnis des Gaußverfahrens, so ist M eine obere Dreiecksmatrix, deren Determinante leicht nach (5.4.7) berechnet werden kann, und es gilt

$$\det A = (-1)^k \det M,$$

wobei k die Anzahl der Zeilenvertauschungen bei der Anwendung des Gaußverfahrens ist.

Bsp.:

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 1 & 2\\ -1 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 3 & 1\\ 2 & 2 & 1 & 2\\ -1 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix} \begin{matrix}\cdot(-2) \quad +\\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$= -\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 3 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 1 & 2\end{pmatrix} \begin{matrix}\\ \cdot(-1)\\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$= -\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 3 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -2 & 1\end{pmatrix} \begin{matrix}\\ \\ \cdot(-2)\\ \\ \end{matrix}$$

$$= -\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 3 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = 2$$