Übungen zur Vorlesung „Differentialgeometrie“ im WS 2012/2013 bei Prof. V. Bangert

Blatt 1 — 22. Oktober 2012

Bitte geben Sie auf Ihren Lösungen Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.

1. Ein m-dimensionaler topologischer Atlas $\mathfrak{A}$ auf einer Menge M ist eine Menge von Bijektionen $\varphi\colon U^\varphi \to V^\varphi$ von Teilmengen $U^\varphi \subseteq M$ auf offene Teilmengen $V^\varphi \subseteq \mathbb{R}^m$ mit folgenden Eigenschaften:

   (a) $\bigcup_{\varphi\in\mathfrak{A}} U^\varphi = M$.

   (b) Für alle φ, $\psi \in \mathfrak{A}$ ist $\psi(U^\varphi \cap U^\psi)$ offen in $\mathbb{R}^m$, und $\varphi\circ\psi^{-1}\colon \psi(U^\varphi\cap U^\psi) \to \varphi(U^\varphi\cap U^\psi)$ stetig.

   Zeigen Sie:

   (a) Durch das Mengensystem

   $$\mathcal{O} := \{U \subseteq M \mid \forall\,\varphi \in \mathfrak{A} : \varphi(U \cap U^\varphi) \text{ offen in } \mathbb{R}^m\}$$

   wird eine Topologie auf M definiert.

   (b) $\mathcal{O}$ ist die einzige Toplogie auf M, die folgende Eigenschaft erfüllt:
   Für alle $\varphi \in \mathfrak{A}$ gilt: U^φ ist offen und $\varphi\colon U^\varphi \to V^\varphi$ ist ein Homöomorphismus.

2. Konstruieren Sie eine C^∞-Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to [0,1]$ mit $f(x) = 1$ für $|x| \le 1$ und $f(x) = 0$ für $|x| \ge 2$.

   Anleitung: Überlegen Sie sich, dass $g\colon \mathbb{R} \to [0,1]$ mit

   $$g(t) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{t^2}} & \text{für } t > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

   eine C^∞-Funktion ist. Betrachten Sie dann

   $$f(x) := \frac{g(4-|x|^2)}{g(4-|x|^2)+g(|x|^2-1)}.$$

3. *Stereographische Projektion.* Die Punkte $N := (0,0,1)$ und $S := (0,0,-1)$ auf der Sphäre $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = 1\}$ werden als *Nord-* bzw. *Südpol* bezeichnet. Die *stereographische Projektion* $\varphi^N : S^2 \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^2$ vom Nordpol aus ordnet dem Punkt $p \in S^2 \setminus \{N\}$ den Schnittpunkt der Geraden durch N und p mit der xy-Ebene $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ zu. Entsprechend wird die Projektion φ^S vom Südpol aus definiert.

   Zeigen Sie:

   (a) Die stereographischen Projektionen von Nord- und Südpol aus bilden einen C^∞-Atlas für die Sphäre $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = 1\}$.

   (b) Der so definierte Atlas induziert die gleiche differenzierbare Struktur, wie der Atlas aus Parallelprojektionen, der in der Vorlesung angegeben wurde.

4. Sei $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \pm 1\}$ versehen mit der von $\mathbb{R}^2$ induzierten Topologie. Betrachten Sie auf X die Äquivalenzrelation $\sim$, so dass für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ die Punkte $(x,1)$ und $(x,-1)$ äquivalent sind und so dass diese die einzigen verschiedenen äquivalenten Punkte sind. $M := X/\sim$ sei mit der Quotiententopologie versehen. Für

$$U^+ := \big\{[(x,y)] \bigm| (x,y) \in X,\ y = 1\big\} \quad \text{und}$$
$$U^- := \big\{[(x,y)] \bigm| (x,y) \in X,\ y = -1\big\}$$

sei $\varphi^\pm \colon U^\pm \to \mathbb{R}$ definiert durch $\varphi^\pm\big([(x,y)]\big) = x$.

Zeigen Sie:

(a) M ist kein Hausdorffraum.

(b) φ^+ und φ^- sind wohldefiniert und bilden einen 1-dimensionalen C^∞-Atlas.

(c) Es existiert keine stetige Funktion $f \colon M \to \mathbb{R}$ mit Träger in U^+ und $f\big([(0,1)]\big) \neq 0$. (Der *Träger* von f ist definiert als der Abschluss der Menge $\{p \in M \mid f(p) \neq 0\}$.)
Hinweis: Zeigen Sie: Für jede stetige Funktion f auf M gilt: $f\big([(0,1)]\big) = f\big([(0,-1)]\big)$.

Abgabe: Montag, 29. Oktober in der Vorlesung

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt

Anwesenheitsaufgaben zur Vorlesung „Differentialgeometrie I“ im Wintersemester 2012/2013 bei Prof. V. Bangert

Blatt 1 — 24. Oktober 2012

1. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig, und es existiere eine C^1-Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so dass für alle $r \geq 0$ und $\varphi \in \mathbb{R}$ gilt:
$$f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = g(r).$$
Zeigen Sie: f ist genau dann stetig differenzierbar, wenn $g'(0) = 0$ gilt.

2. Sei $\mathfrak{A}$ m-dimensionaler C^∞-Atlas auf einem topologischen Raum $M \neq \emptyset$.
Zeigen Sie, dass
$$\mathfrak{F}(\mathfrak{A}) = \left\{ \psi : U^\psi \to V^\psi \;\middle|\; \begin{array}{c} \emptyset \neq U^\psi \subseteq M \text{ offen },\ V^\psi \subseteq \mathbb{R}^m \text{ offen },\ \psi \text{ Homöomorphismus} \\ \text{und für alle } \varphi \in \mathfrak{A} \text{ gilt: } \psi \circ \varphi^{-1} \text{ ist } C^\infty\text{-Diffeomorphismus} \end{array} \right\}$$
ein C^∞-Atlas für M ist.