Übungen zur Vorlesung „Differentialgeometrie“ im WS 2012/2013 bei Prof. V. Bangert

Blatt 2 — 29. Oktober 2012

Bitte geben Sie auf Ihren Lösungen Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.

1. Zeigen Sie:

   (a) Auf der Ebene $\mathbb{R}^2$ existiert genau eine Topologie $\mathcal{O}$, so dass für jedes $y \in \mathbb{R}$ die Gerade $\mathbb{R} \times \{y\}$ eine offene Menge ist und

   $$\varphi_y : \mathbb{R} \times \{y\} \to \mathbb{R},\ \varphi_y(x,y) = x$$

   ein Homöomorphismus von $\mathbb{R} \times \{y\}$ auf $\mathbb{R}$ ist.

   (b) $\mathcal{O}$ ist Hausdorffsch.

   (c) $\mathcal{O}$ besitzt keine abzählbare Basis.

   (d) Auf $(\mathbb{R}^2, \mathcal{O})$ wird durch

   $$\mathfrak{A} := \{\varphi_y : \mathbb{R} \times \{y\} \to \mathbb{R} \mid y \in \mathbb{R}\}$$

   ein 1-dimensionaler C^∞-Atlas auf $\mathbb{R}^2$ definiert.

2. *(2 Punkte)* Sei X ein topologischer Raum und $\mathfrak{A}$ ein m-dimensionaler topologischer Atlas auf X, der nur abzählbar viele Karten enthält. Zeigen Sie, dass die Topologie von X eine abzählbare Basis besitzt.

3. *(2 Punkte)* Es seien M, N Mannigfaltigkeiten mit differenzierbaren Strukturen $\mathfrak{F}_M$ und $\mathfrak{F}_N$ sowie $h : M \to N$ eine stetige Abbildung. Für jedes $p \in M$ existiere $\varphi \in \mathfrak{F}_M$, $\psi \in \mathfrak{F}_N$ mit $p \in U^\varphi$ und $h(p) \in U^\psi$, so dass $\psi \circ h \circ \varphi^{-1} : \varphi(h^{-1}(U^\psi) \cap U^\varphi) \to V^\psi$ glatt ist.

   Zeigen Sie: $h \in C^\infty(M, N)$.

   Anleitung: Sind $\tilde\varphi \in \mathfrak{F}_M$, $\tilde\psi \in \mathfrak{F}_N$ beliebige Karten mit $p \in h^{-1}(U^{\tilde\psi}) \cap U^{\tilde\varphi}$, so wählen Sie φ, ψ wie in der Behauptung und betrachten Sie $(\tilde\psi \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ h \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \tilde\varphi^{-1})$.

4. Ist $U \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, so besitzt U eine natürliche differenzierbare Struktur, die durch den Atlas $\{\mathrm{id}_U\}$ induziert wird. Wir schreiben dann kurz:

   $$\partial_i|_p := \partial_i^{\mathrm{id}_U}|_p$$

   und identifizieren TU_p mit $U \times \mathbb{R}^m$, indem wir $\sum_{i=1}^m v_i \partial_i|_p$ auf $(p, v_1, \dots, v_m)$ abbilden. Ist $m = 1$, so verzichten wir auch auf den Index und schreiben $\partial|_t$ für $\partial_1|_t$.

   Rechnen Sie nach:

   (a) Für $c : (a,b) \to \mathbb{R}^m$ glatt gilt:

   $$\dot c(t) = (c(t), c'(t)).$$

   (b) Für $U \subseteq \mathbb{R}^m$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^n$ gilt:

   $$f_*(p, v) = (f(p), Df(p)v).$$

(c) Für $c : (a,b) \to M$ gilt
$$c_*\partial|_t = \dot{c}(t).$$

(d) Ist $f = (f^1, \dots, f^n) : U \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, so ist
$$f_*\partial_i|_p = \sum_{j=a}^{n} D_i f^j(p) \partial_j|_{f(p)}.$$

5. *Riemannsche Zahlenkugel.*

Ersetzt man in der Definition eines C^∞-Atlanten den Bildbereich $\mathbb{R}^m$ durch $\mathbb{C}^n$ und fordert, dass die Kartenwechsel holomorphe Abbildungen sind, so erhält man den Begriff eines *n-dimensionalen komplexen Atlanten* und damit auch einer *n-dimensionalen komplexen Struktur* und einer *n-dimensionalen komplexen Mannigfaltigkeit.*

Eine Abbildung zwischen zwei komplexen Mannigfaltigkeiten heißt dann *holomorph*, falls sie stetig ist und ihre Kartendarstellungen holomorph sind.

Durch die übliche Identifikation von $\mathbb{C}^n$ mit $\mathbb{R}^{2n}$ wird jede n-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit zu einer $2n$-dimensionalen reellen C^∞-Mannigfaltigkeit.

(a) Zeigen Sie: Die Karten φ^N und $\overline{\varphi^S}$ (vgl. Blatt 1, Aufgabe 3, der Querstrich bezeichne die komplexe Konjugation) bilden einen 1-dimensionalen komplexen Atlas auf S^2.

(b) $\widehat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ werde mit dem Atlas $\mathfrak{A} := \{\varphi_1, \varphi_2\}$ versehen, wobei $\varphi_1 := \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$ ist und $\varphi_2 \colon \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ gegeben ist durch
$$\varphi_2(z) := \begin{cases} 1/z & \text{falls} \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \\ 0 & \text{falls} \quad z = \infty \end{cases}$$
Zeigen Sie: $\mathfrak{A}$ ist ein 1-dimensionaler komplexer Atlas auf $\widehat{\mathbb{C}}$ (zur Topologie vgl. Blatt 1, Aufgabe 1).

(c) Zeigen Sie: Die Abbildung $f \colon S^2 \to \widehat{\mathbb{C}}$, definiert durch
$$f(x) = \begin{cases} \varphi^N(x) & \text{falls} \quad x \neq (0,0,1) \\ \infty & \text{falls} \quad x = (0,0,1) \end{cases}$$
ist biholomorph (d. h. ist bijektiv und sowohl f als auch die Umkehrabbildung sind holomorph).

Abgabe: Montag, 5. November vor der Vorlesung

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt