Übungen zur Vorlesung „Differentialgeometrie“ im WS 2012/2013 bei Prof. V. Bangert

Blatt 3 5. November 2012

Bitte geben Sie auf Ihren Lösungen Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.

1. *Graßmannmannigfaltigkeiten.* Sei $G(n,k)$ die Menge aller k-dimensionalen Untervektorräume des $\mathbb{R}^n$. Für eine beliebige Unterraumzerlegung $X \oplus Y = \mathbb{R}^n$ mit $\dim X = k$ und $\dim Y = n-k$ sei

$$U^Y := \{W \in G(n,k) \mid W \cap Y = \{0\}\}.$$

Jedes $W \in U^Y$ lässt sich eindeutig darstellen als Graph einer linearen Abbildung $L_{X,Y}(W) \in \mathrm{Hom}(X,Y) \cong \mathbb{R}^{k(n-k)}$, d.h.

$$W = \{x + L_{X,Y}(W)(x) \mid x \in X\} \subseteq X \oplus Y = \mathbb{R}^n.$$

Zeigen Sie:

(a) Auf $G(n,k)$ existiert genau eine Topologie, so dass die

$$L_{X,Y} : U^Y \to \mathrm{Hom}(X,Y) \cong \mathbb{R}^{k(n-k)}$$

Homöomorphismen sind (vgl. Blatt 1, Aufgabe 1). Diese hat eine abzählbare Basis und ist Hausdorff'sch.

(b) Der Atlas $\mathfrak{A} := \{L_{X,Y} \mid X \oplus Y = \mathbb{R}^n\}$ macht $G(n,k)$ zu einer $k(n-k)$-dimensionalen C^∞-Mannigfaltigkeit.

Bemerkung: Definiert man $\mathbb{R}P^n$ analog zu $\mathbb{C}P^n$ so ist $G(n,1)$ diffeomorph zu $\mathbb{R}P^{n-1}$.

2. Die Abbildung $h : \mathbb{C}P^1 \to \widehat{\mathbb{C}}$,

$$h([z_1, z_2]) = \begin{cases} \frac{z_1}{z_2} & \text{falls } z_2 \neq 0 \\ \infty & \text{falls } z_2 = 0 \end{cases}$$

ist biholomorph, vgl. Blatt 2, Aufgabe 5).

3. (a) Auf $U_j := \{[(z_0, \ldots, z_n)] \in \mathbb{C}P^n \mid z_j \neq 0\} \subseteq \mathbb{C}P^n$ ist die Abbildung

$$S_j : U_j \to \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\},\ S_j([z]) = \left(\frac{z_0}{z_j}, \ldots, \frac{z_{j-1}}{z_j}, 1, \frac{z_{j+1}}{z_j}, \ldots, \frac{z_n}{z_j}\right)$$

C^∞ und $\pi \circ S_j = \mathrm{id}_{U_j}$.

Bemerkung: S_j stimmt bis auf die 1 in der j'ten Komponenten mit der Karte $\phi_j : U_j \to \mathbb{C}^n$ überein.

(b) Sei $c :]-\varepsilon, \varepsilon[\to \mathbb{C}P^n$ eine $\mathbb{C}^\infty$-Kurve. Zeigen Sie:

Es existiert ein $\delta \in]0, \varepsilon]$ und eine C^∞-Kurve $\tilde{c} :]-\delta, \delta[\to \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$, so dass $\pi \circ \tilde{c} = c\big|]-\delta, \delta[$ gilt.

($\star$) Zusatzfrage: Kann man stets $\delta = \varepsilon$ erreichen?

4. (a) Gegeben ein kommutatives Diagramm von Abbildungen

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \arrow[dr, "\tilde{f}"] \arrow[dd, "\pi"] & \\
& N \\
\mathbb{C}P^n \arrow[ur, "f"] &
\end{tikzcd}$$

(, d.h. $f \circ \pi = \tilde{f}$). Zeigen Sie (mit Hilfe von Aufgabe 3a)):

$$\tilde{f} \in C^\infty(\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}, N) \Leftrightarrow f \in C^\infty(\mathbb{C}P^n, N).$$

(b) Ein homogenes Polynom P auf $\mathbb{C}^{n+1}$ vom Grad k ist eine Abbildung $\mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}$ der Form:

$$P(z_0, \ldots, z_n) = \sum_{i_0+\cdots+i_n=k} a_{i_0\cdots i_n} z_0^{i_0} \cdot \cdots \cdot z_n^{i_n}.$$

Seien nun $P_0, \ldots, P_m$ homogene Polynome auf $\mathbb{C}^{n+1}$ vom Grad k, so dass $P_0^{-1}(0) \cap \cdots \cap P_m^{-1}(0) = \{0\}$ gilt (Bemerkung: Diese Forderung induziert $m \geq n$, vgl. Krulls Hauptidealsatz). Zeigen Sie: Durch

$$f([z]) := [(P_0(z), \ldots, P_m(z))]$$

wird eine C^∞-Abbildung $f : \mathbb{C}P^n \to \mathbb{C}P^m$ definiert. (Prüfen Sie auch nach, dass f wohldefiniert ist.)

Abgabe: Montag, 12. November. Bitte werfen Sie Ihre Lösungen in den dafür vorgesehenen Briefkasten im Kellergeschoss der Eckerstr. 1

Anwesenheitsaufgaben

1. Seien M und N C^∞-Mannigfaltigkeiten und $h : M \to N$ ein Diffeomorphismus.

   Zeigen Sie: $\dim M = \dim N$.

2. Skizzieren Sie die Kurve $c :]0, 2\pi[\to \mathbb{R}^2$, $c(t) = (\sin t, \sin 2t)$.

   Zeigen Sie:

   (a) c ist eine injektive Immersion des Intervalls $(0, 2\pi) \subseteq \mathbb{R}$ in $\mathbb{R}^2$.

   (b) c ist keine Einbettung (das heißt die Umkehrabbildung $c^{-1} : c(]0, 2\pi[) \to]0, 2\pi[$ ist nicht stetig).