

Grundbegriffe der Topologie

V. Bangert

(zur Vorlesung Differentialgeometrie, WS 12/13)

Def. 0.1 Ein topologischer Raum ist eine Menge X zusammen mit einem System \mathcal{O} von Teilmengen von X , das folgende Eigenschaften hat

- (a) $\emptyset \in \mathcal{O}$, $X \in \mathcal{O}$ ($\emptyset =$ leere Menge)
- (b) Ist $V_i \in \mathcal{O}$ für alle $i \in I$, so gilt $\bigcup_{i \in I} V_i \in \mathcal{O}$.
- (c) Ist $V_1 \in \mathcal{O}$, $V_2 \in \mathcal{O}$, so gilt $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{O}$.

Bezeichnungen: \mathcal{O} heißt eine Topologie auf X . Die Elemente von \mathcal{O} heißen offene Mengen (bzgl. \mathcal{O}). Eine Menge $U \subseteq X$ heißt Umgebung von $x \in X$, falls eine offene Menge V existiert, so daß $x \in V \subset U$ gilt. $A \subset X$ heißt abgeschlossen, falls $X \setminus A = \{x \in X \mid x \notin A\}$ offen ist.

Bsp.: Für $x \in \mathbb{R}^n$ sei $\|x\| := (\sum x_i^2)^{\frac{1}{2}}$, und für $r > 0$ sei $B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|x - y\| < r\}$. Wir definieren eine Topologie \mathcal{O} auf \mathbb{R}^n ("die übliche Topologie auf \mathbb{R}^n ") durch: $V \in \mathcal{O} \Leftrightarrow V \subseteq \mathbb{R}^n$ und für alle $x \in V$ existiert $r > 0$ mit $B(x, r) \subseteq V$.

Def. 0.2 Es seien (X, \mathcal{O}_X) und (Y, \mathcal{O}_Y) topologische Räume, $f: X \rightarrow Y$. f heißt stetig, falls aus $V \in \mathcal{O}_Y$ folgt $f^{-1}(V) \in \mathcal{O}_X$. f heißt Homöomorphismus, falls f bijektiv ist und falls f und f^{-1} stetig sind.

Bem.: Die Komposition (Hintereinanderausführung) stetiger Abbildungen ist stetig.

Def. 0.3 Sei (X, \mathcal{O}_X) topologischer Raum und $A \subseteq X$.

Die Topologie $\mathcal{O}_A := \{W \subseteq A \mid \text{Es existiert } V \in \mathcal{O} \text{ mit } W = V \cap A\}$ heißt die von \mathcal{O}_X auf A induzierte Topologie, (A, \mathcal{O}_A) heißt Teilraum von (X, \mathcal{O}_X) .

Bsp.: $X = \mathbb{R}$ mit der üblichen Topologie, $A = [0, \infty)$. Dann ist das "halb-offene" Intervall $[0, 1)$ offen in A (d.h. $[0, 1) \in \mathcal{O}_A$), da $[0, 1) = (-\infty, 1) \cap A$ und $(-\infty, 1)$ offen in $X = \mathbb{R}$.

Bem.: Sei $f : X \rightarrow Y$ stetig, $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$ und $f(A) \subseteq B$. Dann ist $f|_A : A \rightarrow B$ stetig bzgl. \mathcal{O}_A und \mathcal{O}_B .

Def. 0.4 Seien (X, \mathcal{O}_X) , (Y, \mathcal{O}_Y) topologische Räume. Die Produkttopologie $X \times Y$ von \mathcal{O}_X und \mathcal{O}_Y ist die Topologie auf $X \times Y$, die definiert ist durch:

$W \in \mathcal{O}_{X \times Y} \Leftrightarrow W \subseteq X \times Y$ und für alle $(x, y) \in W$ existieren $U \in \mathcal{O}_X, V \in \mathcal{O}_Y$ mit $(x, y) \in U \times V \subseteq W$.

Bsp.: Die übliche Topologie auf $\mathbb{R}^{n+m} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ ist die Produkttopologie der üblichen Topologien auf \mathbb{R}^n und \mathbb{R}^m .

Def. 0.5 Sei (X, \mathcal{O}) topologischer Raum. $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{O}$ heißt Basis der Topologie \mathcal{O} , falls gilt: Für alle $V \in \mathcal{O}$ und alle $x \in V$ existiert $B \in \mathcal{B}$ mit $x \in B \subseteq V$.

Bsp.:

- (a) $\mathcal{B} = \{B(x, r) \mid x \in \mathbb{R}^n, r > 0\}$ ist Basis der üblichen Topologie des \mathbb{R}^n . (Man muß nur zeigen, daß die $B(x, r)$ offen sind; Dreiecksungleichung!)
- (b) Der \mathbb{R}^n besitzt sogar eine abzählbare Basis $\mathcal{B}' = \{B(x, r) \mid x \in \mathbb{Q}^n, r \in \mathbb{Q} \text{ und } r > 0\}$
- (c) Also besitzt auch jeder Teilraum A eines \mathbb{R}^n eine abzählbare Basis seiner Topologie.
- (d) Die Produkttopologie (vgl. 0.4) ist dadurch definiert, daß die Menge $\mathcal{B} = \{U \times V \mid U \in \mathcal{O}_X, V \in \mathcal{O}_Y\}$ eine Basis der Produkttopologie ist.

Def. 0.6 Ein topologischer Raum (X, \mathcal{O}) heißt Hausdorffraum, falls für alle $x, y \in X$ mit $x \neq y$ gilt:

Es existieren $U \in \mathcal{O}, V \in \mathcal{O}$ mit $x \in U, y \in V$ und $U \cap V = \emptyset$.

Bsp.: Jeder Teilraum eines \mathbb{R}^n .

Bem.: Sind $f, g : X \rightarrow Y$ stetig und ist Y Hausdorffsch, so ist $A = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ abgeschlossen.

Def. 0.7 Ein topologischer Raum (X, \mathcal{O}) heißt zusammenhängend, wenn X nicht in zwei disjunkte, offene, nichtleere Mengen zerlegt werden kann, d.h. falls aus $\emptyset \neq U \in \mathcal{O}$, $\emptyset \neq V \in \mathcal{O}$ und $U \cup V = X$ folgt $U \cap V \neq \emptyset$.

Bsp.:

- a) Jedes Intervall in \mathbb{R} (mit der induzierten Topologie) ist zusammenhängend.
- b) Der \mathbb{R}^n und jeder Ball $B(x, r) \subseteq \mathbb{R}^n$ sind zusammenhängend.
- c) Ist $f : X \rightarrow Y$ stetig und X zusammenhängend, so ist $f(X) \subseteq Y$ zusammenhängend.

Bezeichnung: Sei (X, \mathcal{O}) topologischer Raum und $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ mit der induzierten Topologie.

Eine stetige Abbildung $c : [0, 1] \rightarrow X$ heißt Weg in X (von $c(0)$ nach $c(1)$).

Def. Ein topologischer Raum (X, \mathcal{O}) heißt wegzusammenhängend, falls zu je zwei Punkten $x, y \in X$ ein Weg in X von x nach y existiert. (X, \mathcal{O}) heißt lokal wegzusammenhängend, falls jeder Punkt $x \in X$ eine (bzgl. der induzierten Topologie) wegzusammenhängende Umgebung besitzt.

Bem.: (X, \mathcal{O}) wegzusammenhängend $\Rightarrow (X, \mathcal{O})$ zusammenhängend.

Bsp.: Der Teilraum $\left\{ \left(x, \sin \frac{1}{x} \right) \mid x \in \mathbb{R}, x > 0 \right\} \cup \{ (0, y) \mid y \in [-1, 1] \}$ von \mathbb{R}^2 ist zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend.

Satz. Ist (X, \mathcal{O}) zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend, so ist (X, \mathcal{O}) wegzusammenhängend.

Bew.: Die Relation $(x \sim y \Leftrightarrow \text{es existiert ein Weg in } X \text{ von } x \text{ nach } y)$ ist offenbar reflexiv, $x \sim x$ (konstanter Weg). Sie ist symmetrisch, denn ist c ein Weg von $c(0) = x$ nach $c(1) = y$, so ist $t \rightarrow c(1 - t)$ ein Weg von y nach x . Schließlich ist \sim transitiv; ist nämlich c_1 ein Weg von x nach y und c_2 ein Weg von y nach z , so ist

$$c(t) := \begin{cases} c_1(2t) & \text{für } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ c_2(2t - 1) & \text{für } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

ein Weg von x nach z .

Die Äquivalenzklassen der Äquivalenzrelation \sim heißen Wegzusammenhangskomponenten von X . “ X lokal wegzusammenhängend” bedeutet gerade, daß die Wegzusammenhangskomponenten von X offen sind. Ist nun $x \in X$, so ist $U = \{y \in X \mid x \sim y\}$ und $V = \{y \in X \mid x \not\sim y\}$ eine Zerlegung von X in offene, disjunkte Mengen U und V und $U \neq \emptyset$. Da X zusammenhängend ist, folgt $V = \emptyset$, d.h. $X = U$. Das ist gerade die Behauptung.

Bezeichnung: Ein System $(U_i)_{i \in I}$ von offenen Mengen heißt offene Überdeckung von X , falls $\bigcup_{i \in I} U_i = X$.

Def. 0.9 Ein topologischer Raum (X, \mathcal{O}) heißt kompakt, falls jede offene Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ von X eine endliche Teilüberdeckung von X besitzt, d.h. dass eine endliche Teilmenge $\{i_1, \dots, i_n\}$ der Indexmenge I existiert, so daß $X = \bigcup_{j=1}^n U_{i_j}$.

Bez.: Eine Teilmenge von X heißt kompakt, wenn sie mit der von X induzierten Topologie ein kompakter topologischer Raum ist.

Bsp.: (Bolzano-Weierstrass) Ein Teilraum $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ist kompakt, genau dann wenn A (bzgl. der üblichen Topologie des \mathbb{R}^n) abgeschlossen und beschränkt ist.

Bem.:

a) Ist $f : X \rightarrow Y$ stetig und X kompakt, so ist $f(X)$ kompakt.

b) Ist $A \subseteq X$ kompakt und X Hausdorffsch, so ist A abgeschlossen.

Bew. von b): Für alle $x \in X \setminus A$, $y \in A$ existieren offene Mengen $U_{x,y}$, $V_{x,y}$ mit $x \in U_{x,y}$, $y \in V_{x,y}$ und $U_{x,y} \cap V_{x,y} = \emptyset$. Für festes $x \in X \setminus A$ bildet $(V_{x,y})_{y \in A}$ eine offene Überdeckung von A . Sei $V_{x,y_1}, \dots, V_{x,y_n}$ eine endliche Teilüberdeckung von A und $U_x := \bigcap_{i=1}^n U_{x,y_i}$. Dann ist U_x offen, $x \in U_x$ und $U_x \cap A \subseteq U_x \cap \left(\bigcup_{i=1}^n V_{x,y_i} \right) = \emptyset$.

c) Ist $f : X \rightarrow Y$ stetig und bijektiv und ist X kompakt und Y Hausdorff, so ist f Homöomorphismus.

Def. 0.10 Ein topologischer Raum (X, \mathcal{O}) heißt lokalkompakt, wenn für

jedes $x \in X$ und für jede Umgebung U von X eine kompakte Umgebung V von x existiert mit $V \subseteq U$.

Satz: (X, \mathcal{O}) sei lokalkompakt mit abzählbarer Basis. Dann existiert eine Folge von kompakten Mengen $X_n \subseteq X$ mit $\dots \subseteq X_{n-1} \subseteq \overset{\circ}{X}_n \subseteq X_n \subseteq \overset{\circ}{X}_{n+1} \subseteq \dots$ und $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n = X$. Dabei bezeichne

$$\overset{\circ}{X}_n = \bigcup \{U \mid U \in \mathcal{O} \text{ und } U \subseteq X_n\} \text{ den "offenen Kern" von } X_n.$$

Bew.: Sei $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Basis von (X, \mathcal{O}) . Wir überlegen zunächst, daß jede offene Überdeckung $(V_i)_{i \in I}$ eine abzählbare Teilüberdeckung besitzt: Für alle $n \in \mathbb{N}$, für die ein $i \in I$ mit $U_n \subseteq V_i$ existiert, wähle ein solches $i = i_n \in I$. Dann wird X von (V_{i_n}) überdeckt.

Da X lokalkompakt ist, existiert für alle $x \in X$ eine kompakte Umgebung V_x von x . Die $(\overset{\circ}{V}_x)_{x \in X}$ bilden also eine offene Überdeckung von X . Sei $(\overset{\circ}{V}_{x_n})_{n \in \mathbb{N}}$ eine abzählbare Teilüberdeckung. Wir definieren X_n induktiv durch

$$\begin{aligned} X_1 &:= V_{x_1} \\ X_{n+1} &:= \bigcup_{i=1}^m V_{x_i}, \end{aligned}$$

wobei m die kleinste natürliche Zahl $\geq n$ ist, für die $X_n \subseteq \bigcup_{i=1}^m \overset{\circ}{V}_{x_i}$ gilt. Solch ein m existiert, da X_n kompakt und $(\overset{\circ}{V}_{x_k} \cap X_n)_{k \in \mathbb{N}}$ eine offene Überdeckung von X_n ist. X_{n+1} ist kompakt, da eine endliche Vereinigung kompakter Mengen kompakt ist.

Die Quotiententopologie

Ist X eine Menge und \sim eine Äquivalenzrelation auf X , so bezeichne $[x] = \{y \in X \mid x \sim y\}$ die Äquivalenzklasse von $x \in X$, X/\sim die Menge der Äquivalenzklassen und $\pi : X \rightarrow X/\sim$, $\pi(x) = [x]$, die kanonische Projektion.

Def. 0.11 Sei (X, \mathcal{O}) topologischer Raum und \sim Äquivalenzrelation auf X . Die Quotiententopologie auf X/\sim ist definiert durch:

$$U \subseteq X/\sim \text{ offen} \Leftrightarrow \pi^{-1}(U) \in \mathcal{O}.$$

Bem.:

- a) $\pi : X \rightarrow X/\sim$ ist stetig.
- b) $f : X/\sim \rightarrow Y$ ist genau dann stetig, wenn $f \circ \pi : X \rightarrow Y$ stetig ist.
- c) Ist X/\sim Hausdorff, so sind alle Äquivalenzklassen $[x] \subseteq X$ abgeschlossen in X .

Bsp.: Sei $X = \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ mit der üblichen Topologie ($\mathbb{C}^{n+1} \simeq \mathbb{R}^{2n+2}$) und der Äquivalenzrelation: $x \sim y \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C} : x = \lambda y$. X/\sim mit der Quotiententopologie wird n -dimensionaler komplexer projektiver Raum genannt. $X/\sim =: \mathbb{C}\mathcal{P}^n$.

Eigenschaften:

- 1) $\pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}\mathcal{P}^n$ ist offen, d.h. ist $U \subseteq \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ offen, so ist $\pi(U) \subseteq \mathbb{C}\mathcal{P}^n$ offen. Speziell besitzt $\mathbb{C}\mathcal{P}^n$ eine abzählbare Basis.
- 2) $\mathbb{C}\mathcal{P}^n$ ist Hausdorff: Sei $\| \cdot \|$ eine hermitesche Norm auf \mathbb{C}^{n+1} . Seien $[x_1] \neq [x_2]$ verschiedene Punkte in $\mathbb{C}\mathcal{P}^n$, o.E. $\|x_1\| = 1 = \|x_2\|$. Sei $\delta := \min\{\|x_1 - \lambda x_2\| \mid \lambda \in S^1 \subseteq \mathbb{C}\} > 0!$ Dann gilt für die offenen "Kegel" $C_i = \{\lambda z \mid z \in \mathbb{C}^{n+1}, \|z\| = 1, \|z - x_i\| < \frac{1}{2}\delta, \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\}$:

$$\pi(C_1) \cap \pi(C_2) = \emptyset \text{ und } [x_i] \in \pi(C_i).$$

Die $\pi(C_i)$ sind nach 1) offen in $\mathbb{C}\mathcal{P}^n$.

- 3) $\mathbb{C}\mathcal{P}^n$ ist kompakt: Sei $S^{2n+1} \subseteq \mathbb{C}^{n+1}$ die Einheitskugel bzgl. einer Norm auf \mathbb{C}^{n+1} . Dann ist S^{2n+1} kompakt und $\pi(S^{2n+1}) = \mathbb{C}\mathcal{P}^n$, so daß $\mathbb{C}\mathcal{P}^n$ wegen Bem. a) nach Def. 0.9 kompakt ist.