Übungen zur Vorlesung „Differentialgeometrie“ im WS 2012/2013 bei Prof. V. Bangert

Blatt 10 7. Januar 2013

Bitte geben Sie auf Ihren Lösungen Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.

1. *Die euklidische Metrik in Kugelkoordinaten.* Sei g^{eukl} die euklidische Metrik auf $\mathbb{R}^3$, d.h. $g_x^{\text{eukl}}((x,v),(x,w)) = \sum_{i=1}^3 v_i w_i$ für $x \in \mathbb{R}^3$, $(x,v),(x,w) \in T\mathbb{R}^3_x$. Sei $F : V = (0,\infty) \times (0,2\pi) \times (0,\pi) \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$F(r,\varphi,\theta) = r(\sin\varphi\sin\theta, \cos\varphi\sin\theta, \cos\theta), \quad \text{für } (r,\varphi,\theta) \in V.$$

Die Abbildung $\psi := F^{-1} : F(V) \to V$ ist eine Karte des $\mathbb{R}^3$.

(a) Berechnen Sie die Koeffizienten von g^{eukl} in dieser Karte. Berechnen Sie in dieser Karte die Länge der Kurve $c : (0,2\pi) \to \mathbb{R}^3$, $t \mapsto F(r_0, t, \theta_0)$ (für vorgegebene r_0, θ_0).

(b) Berechen Sie das Volumen der “Kugelschale” $F(\{(r,\varphi,\theta) \in V \mid r_0 < r < r_1\})$.

2. (a) Sei (M,g) pseudoriemannsche Mannigfaltigkeit und $\Gamma \subseteq \text{Diff}(M)$ Untergruppe der Diffeomorphismengruppe von M, die frei und eigentlich diskontinuierlich auf M operiert. Bezeichne $\pi : M \to M/\Gamma$ die Projektion. Zeigen Sie:

Es existiert genau dann eine pseudoriemannsche Metrik $\overline{g}$ auf M/Γ mit $\pi^*\overline{g} = g$, wenn alle $h \in \Gamma$ Isometrien von (M,g) sind.

(b) Folgern Sie, dass die Standardmetrik auf S^n eine Metrik auf $\mathbb{R}P^n = S^n/\{\pm \text{id}_{S^n}\}$ induziert.

3. Betrachten Sie $\mathbb{R}^{m+1}$ mit der Bilinearform $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ gegeben durch $\langle x,y\rangle_1 = \sum_{i=1}^m x_i y_i - x_{m+1}y_{m+1}$. Bezeichne mit $O^+(m+1,1) \subseteq GL(m+1,\mathbb{R})$ die Menge der Matrizen $A = (a_{i,j})_{1\le i,j\le m+1}$, für die gilt $A^*\langle\cdot,\cdot\rangle_1 = \langle\cdot,\cdot\rangle_1$ und $a_{m+1,m+1} > 0$. Sei weiterhin

$$M := \{x \in \mathbb{R}^{m+1} \mid x_{m+1} > 0, \langle x,x\rangle_1 = -1\}$$

und $i : M \to \mathbb{R}^{m+1}$ die kanonische Einbettung. Zeigen Sie:

(a) Ist $v \in \mathbb{R}^{m+1}$ und $\langle v,v\rangle_1 < 0$, so ist $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ eingeschränkt auf die Hyperebene $v^\perp := \{w \in \mathbb{R}^{m+1} \mid \langle v,w\rangle_1 = 0\}$ positiv definit. Folgern Sie daraus, dass $(M, g^M := i^*\langle\cdot,\cdot\rangle_1)$ eine m-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit ist.

(b) Für alle $A \in O^+(m+1,1)$ gilt $A(M) = M$ und $A|M$ ist eine Isometrie von (M,g^M)

(c) Zu je zwei Punkten $p,q \in M$ und Orthonormalbasen $v_1,\dots,v_m \in TM_p$ und $w_1,\dots,w_m \in TM_q$ existiert genau ein $A \in O^+(m+1,1)$ mit $A(p) = q$ und $A(v_i) = w_i$ für $1 \le i \le m$.

4. Sei (M, g) m-dimensionale pseudoriemannsche Mannigfaltigkeit und seien φ, ψ Karten auf M. Zeigen Sie:

   (a) Ist $p \in U^\varphi$ und $v = \sum_{i=1}^m v^i \partial_i^\varphi|_p \in TM_p$, so gilt $b(v) = \sum_{i=1}^m \pi_i d\varphi^i|_p$ mit $\pi_i = \sum_{j=1}^m {}^\varphi g_{ij}(p) v^j$.

   (b) Ist $p \in U^\varphi$, $\pi = \sum_{i=1}^m \pi_i \, \mathrm{d}\varphi^i|_p$ und $({}^\varphi g^{ij}(p))_{1 \le i,j \le m}$ die zu $({}^\varphi g_{ij}(p))_{1 \le i,j \le m}$ inverse Matrix (d.h. es gilt $\sum_{k=1}^m {}^\varphi g_{ik} {}^\varphi g^{kj} = \delta_i^j$), so gilt $\#(\pi) = \sum_{i=1}^m v^i \partial_i^\varphi|_p$ mit $v^i = \sum_{j=1}^m {}^\varphi g^{ij}(p) \pi_j$.

   (c) Ist $A \subseteq U^\varphi \cap U^\psi$ messbar, so gilt:

   $$\int_{\varphi(A)} |\det({}^\varphi g_{ij})|^{\frac{1}{2}} (\varphi^{-1}(x)) \mathrm{d}x = \int_{\psi(A)} |\det({}^\psi g_{ij})|^{\frac{1}{2}} (\psi^{-1}(x)) \mathrm{d}x,$$

   d.h.

   $$\mathrm{vol}^g(A) := \int_{\varphi(A)} |\det({}^\varphi g_{ij})|^{\frac{1}{2}} (\varphi^{-1}(x)) \mathrm{d}x$$

   hängt nicht von der Wahl der Karte φ ab.

   Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass für $F := \varphi \circ \psi^{-1}|_{\psi(U^\varphi \cap U^\psi)}$ gilt: $\det({}^\psi g_{ij}) = \det(F')^2 \circ \psi \cdot \det({}^\varphi g_{ij})$.

Abgabe: Montag, 14. Januar, vor Beginn der Vorlesung. Bitte werfen Sie Ihre Lösungen in den dafür vorgesehenen Briefkasten im Kellergeschoss der Eckerstr. 1