# Übungen zur Vorlesung „Differentialgeometrie“ im WS 2012/2013 bei Prof. V. Bangert

Blatt 11 — 14. Januar 2013

*Bitte geben Sie auf Ihren Lösungen Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.*

1. Betrachten Sie das Poincarémodell $(B^m, g^P)$ und das obere Halbraummodell $(H^m, g^H)$ des hyperbolischen Raumes.

   Zeigen Sie, dass “die Inversion des $\mathbb{R}^m$ mit Pol $p = -e_m$”, gegeben durch die Formel

   $$F(x) = p + \frac{2(x-p)}{|x-p|^2}.$$

   eine Isometrie von $(B^m, g^P)$ nach $(H^m, g^H)$ ist.

2. Sei $M$ zusammenhängende differenzierbare Mannigfaltigkeit und $\Gamma \lhd \mathrm{Diff}(M)$ operiere frei und eigentlich diskontinuierlich, $\pi : M \to M/\Gamma = \overline{M}$ sei die kanonische Projektion.

   (a) Zeigen Sie: Zu einem $F \in \mathrm{Diff}(M)$ existiert ein Diffeomorphismus $\overline{F} : \overline{M} \to \overline{M}$ mit $\overline{F} \circ \pi = \pi \circ F$, wenn in der Gruppe $\mathrm{Diff}(M)$ gilt:

   $$F^{-1}\Gamma F = \Gamma.$$

   (b) Ist $g$ Riemannsche Metrik auf $M$, so dass alle $h \in \Gamma$ Isometrien von $(M, g)$ sind, so existiert nach Aufgabe 2 von Blatt 10 genau eine Riemannsche Metrik $\overline{g}$ auf $\overline{M}$ mit $\pi^*\overline{g} = g$. Zeigen Sie: Ist $F : (M, g) \to (M, g)$ Isometrie mit $F^{-1}\Gamma F = \Gamma$, so ist das induzierte $\overline{F}$ Isometrie von $(\overline{M}, \overline{g})$ auf sich.

   (c) Folgern Sie aus 2b), dass der $\mathbb{R}P^n$ mit der Standardmetrik Raum freier Beweglichkeit ist.

   (d) *(4 Zusatzpunkte):* Zeigen Sie: Existiert zu einem $F \in \mathrm{Diff}(M)$ ein Diffeomorphismus $\overline{F} : \overline{M} \to \overline{M}$ mit $\overline{F} \circ \pi = \pi \circ F$, so gilt in der Gruppe $\mathrm{Diff}(M)$:

   $$F^{-1}\Gamma F = \Gamma.$$

   *Hinweis:* Zeigen Sie zunächst, dass jedes $h \in \mathrm{Diff}(M)$ mit $\pi \circ h = \pi$ lokal mit einem Element aus $\Gamma$ übereinstimmt (vgl. dazu auch den Beweis von Satz (4.3)). Folgern Sie dann aus der Zusammenhangseigenschaft, dass $h \in \Gamma$.

3. (a) Sei $M = \mathbb{R}^m$ mit der euklidischen Metrik $g = g^{\langle\cdot,\cdot\rangle}$, d.h. $g((x,v),(x,w)) = \sum_{i=1}^m v_i w_i$ für alle $(x,v),(x,w) \in T(\mathbb{R}^m)_x$. Zeigen Sie, dass der Gradient $\operatorname{grad} f$ bezüglich $g$ von $f \in C^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ durch

   $$\operatorname{grad} f = (\partial_1 f, \partial_2 f, \ldots, \partial_m f)$$

   gegeben ist.

   (b) Sei $N \subseteq \mathbb{R}^m$ Untermannigfaltigkeit, $f \in C^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ und $\tilde{f} := f|_N$. Dann gilt für den Gradienten $\operatorname{grad} \tilde{f}$ von $\tilde{f}$ bezüglich der von $g$ auf $N$ induzierten Riemannschen Metrik: Für alle $x \in N$ ist $\operatorname{grad} \tilde{f}(x)$ die Orthogonalprojektion von $\operatorname{grad} f(x)$ auf $TN_x$.

4. Sei $(M, g)$ Riemannsche Mannigfaltigkeit und $\rho \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ mit $|\operatorname{grad}\rho| = 1$ (d.h. $g(\operatorname{grad}\rho, \operatorname{grad}\rho) = 1$).

   (a) Für alle Punkte $p, q \in M$ gilt: $d(p, q) \geq |\rho(p) - \rho(q)|$.

   *Hinweis:* Folgern Sie aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung, dass für alle $p \in M$, $v \in TM_p$ gilt: $|v|^g \geq g(v, \operatorname{grad}\rho(p))$ und zeigen Sie damit, dass jede Kurve $\gamma$ zwischen $p$ und $q$ mindestens $|\rho(p) - \rho(q)|$ lang ist.

   (b) Ist $c : [a, b] \to M$ Integralkurven von $\operatorname{grad}\rho$ (d.h. $\dot{c} = (\operatorname{grad}\rho) \circ c$), so ist $c$ Kürzeste (vgl. Definition in den Anwesenheitsaufgaben).

   (c) Auf $M = S^2 \setminus \{(0, 0, 1), (0, 0, -1)\}$ betrachten wir die Funktion $\theta(x, y, z) = \arccos(z)$. Zeigen Sie, dass bezüglich der Standardmetrik auf $S^2$ gilt: $|\operatorname{grad}\theta| = 1$. Schließen Sie daraus, dass Großkreissegmente der Länge $\leq \pi$ Kürzeste auf der $S^2$ sind.

Abgabe: Montag, 21. Januar, vor Beginn der Vorlesung. Bitte werfen Sie Ihre Lösungen in den dafür vorgesehenen Briefkasten im Kellergeschoss der Eckerstr. 1

## Anwesenheitsaufgaben

Sei $(M, g)$ Riemannsche Mannigfaltigkeit.

**Definition** Sei $c : [a, b] \to M$ stückweise $C^1$. Die Kurve $c$ heißt Kürzeste (bzgl. $g$), wenn $L^g(c) = d(c(a), c(b))$ gilt.

Zeigen Sie:

1. Ist $c : [a, b] \to M$ stückweise $C^1$ und Kürzeste und $[\tilde{a}, \tilde{b}] \subseteq [a, b]$, so ist $\tilde{c} := c|[\tilde{a}, \tilde{b}]$ Kürzeste.

2. Ist $c : [a, b] \to M$ stückweise $C^1$ und existieren Folgen $a_i \searrow a$ und $b_i \nearrow b$, so dass $c|[a_i, b_i]$ Kürzeste sind, so ist $c$ Kürzeste.