Übungen zur Vorlesung „Differentialgeometrie“ im WS 2012/2013 bei Prof. V. Bangert

Blatt 12 — 21. Januar 2013

Bitte geben Sie auf Ihren Lösungen Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.

1. *(2 Punkte)* Sei $e_1 = (1,0) \in \mathbb{R}^2$ und $\gamma(t) := (\cos t, \sin t)$, $0 < t < 2\pi$. $\psi : \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_{\geq 0} \times \{0\}) \to \mathbb{R}_{>0} \times]0, 2\pi[$ seien Polarkoordinaten, d.h. $\psi^{-1}(r, \varphi) = r(\cos\varphi, \sin\varphi)$.

   Sei $V(t) = (\gamma(t), e_1)$, so dass V parallel längs γ bezüglich des Standardzusammenhangs $\overline{\nabla}$ auf $\mathbb{R}^2$ ist. Berechnen Sie die Komponenten $a(t)$, $b(t)$ von $V(t)$ bzgl. des Basisfelds ∂_1^ψ, ∂_2^ψ, d.h.

   $$V(t) = a(t)\partial_1^\psi|_{\gamma(t)} + b(t)\partial_2^\psi|_{\gamma(t)}.$$

   Bemerkung: In dieser Situation würde man meist ∂_1^ψ als $\frac{\partial}{\partial r}$ und ∂_2^ψ als $\frac{\partial}{\partial \varphi}$ bezeichnen.

2. *(6 Punkte)* Ziel der Aufgabe ist zu zeigen, dass die Distanzfunktion d^L des Lorenzmodells (M_L^m, g^L) des hyperbolischen Raums durch

   $$d^L(x,y) = \operatorname{arcosh}(-\langle x, y\rangle_1)$$

   gegeben ist und dass für alle $(x, v) \in TM_L^m$ mit $\langle v, v\rangle_1 = 1$ die Kurve $c(s) = \cosh(s)x + \sinh(s)v$ nach Bogenlänge parametrisierte Kürzeste in (M_L^m, g^L) ist (d.h. $L^{g^L}(c|[s_0, s_1])) = s_1 - s_0 = d^L(c(s_0), c(s_1))\ \forall s_0 < s_1$ in $\mathbb{R}$).

   Zeigen Sie dazu, dass für alle $x \in M_L^m$ die Funktion

   $$\rho : y \in M \mapsto \operatorname{arcosh}(-\langle x, y\rangle_1)$$

   (bzgl. g^L) Gradienten der Länge 1 hat, und argumentieren sie wie in den Aufgaben 3 und 4 von Blatt 11.

   Hinweis: Sie können die umgekehrte Cauchy-Schwarz-Ungleichung für zwei zeitartige Vektoren v, w (d.h. $\langle v, v\rangle_1 < 0$ und $\langle w, w\rangle_1 < 0$) benutzen:

   $$\langle v, w\rangle_1^2 \geq |v|_1^2 \cdot |w|_1^2,$$

   wobei Gleichheit genau dann gilt, wenn v und w linear abhängig sind. Vergleichen Sie für einen Beweis dieser Aussage zum Beispiel Thm. 1.4.1/ p. 48 in [Naber].

   [Naber] Gregory L. Naber, *The geometry of Minkowski spacetime*, volume 92 of *Applied Mathematical Sciences*, Springer, New York, 2012, An introduction to the mathematics of the special theory of relativity.

3. Sei M C^∞-Mannigfaltigkeit und ∇ linearer Zusammenhang auf TM. Seien φ und ψ zwei Karten mit $U := U^\varphi \cap U^\psi \neq \emptyset$ und seien $F := \psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(U)$ und $\overline{F} := F^{-1} = \varphi \circ \psi^{-1} : \psi(U) \to \varphi(U)$ die Kartenwechsel.

   Zeigen Sie:

   $${}^\psi\Gamma_{ij}^k(p) = \sum_{r,s,l} {}^\varphi\Gamma_{rs}^l(p) D_l F^k(\varphi(p)) D_i \overline{F}^r(\psi(p)) D_j \overline{F}^s(\psi(p)) + \sum_l D_l F^k(\varphi(p)) D_i D_j \overline{F}^l(\psi(p)).$$

4. Seien $r, s \in \mathbb{N}_0$ und $\widetilde{T} : \underbrace{\Gamma(T^*M) \times \cdots \times \Gamma(T^*M)}_{r} \times \underbrace{\Gamma(TM) \times \cdots \times \Gamma(TM)}_{s} \to C^\infty(M, \mathbb{R})$ ein multilinearer Operator, der homogen bzgl. der Multiplikation mit C^∞-Funktion ist, d.h. für alle $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ gilt:

$$\widetilde{T}(f\sigma^1, \sigma^2, \ldots, \sigma^r, X_1, \ldots, X_s) = f\widetilde{T}(\sigma^1, \ldots \sigma^r, X_1, \ldots, X_s)$$

und ensprechend für die anderen Komponenten.

Zeigen Sie mit der Methode von Lemma (8.2), dass es ein Tensorfeld $T \in \Gamma(T^r_s M)$ gibt, so dass für alle $\sigma^1, \ldots, \sigma^r \in \Gamma(T^*M)$, $X_1, \ldots, X_s \in \Gamma(TM)$ und alle $p \in M$ gilt:

$$(\widetilde{T}(\sigma^1, \ldots, \sigma^r, X_1, \ldots, X_s))(p) = T_p(\sigma^1|_p, \ldots \sigma^r|_p, X_1|_p, \ldots, X_s|_p).$$

Hinweis: Zu zeigen ist, dass $(\widetilde{T}(\sigma^1, \ldots, \sigma^r, X^1, \ldots, X^s))(p)$ nur von $\sigma^1|_p, \ldots \sigma^r|_p$, $X_1|_p, \ldots, X_s|_p$ abhängt.

Abgabe: Montag, 28. Januar, vor Beginn der Vorlesung. Bitte werfen Sie Ihre Lösungen in den dafür vorgesehenen Briefkasten im Kellergeschoss der Eckerstr. 1

Anwesenheitsaufgaben

1. Überlegen Sie sich mit Hilfe von Aufgabe 4 von Blatt 11, dass für alle $x, y \in S^2$ gilt:

$$d^{S^2}(x, y) = \arccos(\langle x, y \rangle).$$

Leiten Sie daraus eine Formel für den Abstand zweier Punkte x und y auf S^2 mit den "geographischen Koordinaten" $\varphi, \theta, \widetilde{\varphi}, \widetilde{\theta}$ ab ($x = (\sin\varphi\sin\theta, \cos\varphi\sin\theta, \cos\theta)$, $y = (\sin\widetilde{\varphi}\sin\widetilde{\theta}, \cos\widetilde{\varphi}\sin\widetilde{\theta}, \cos\widetilde{\theta})$).