Übungen zur Vorlesung „Differentialgeometrie“ im WS 2012/2013 bei Prof. V. Bangert

Blatt 13 28. Januar 2013

Bitte geben Sie auf Ihren Lösungen Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.

1. Sei $\overline{\nabla}$ der Standardzusammenhang auf $\mathbb{R}^3$. Berechnen Sie die Christoffelsymbole ${}^{\psi}\Gamma_{ij}^k$ $(1 \leq i, j, k \leq 3)$ von $\overline{\nabla}$ in Kugelkoordinaten (d.h. bzgl. der Karte ψ aus Aufgabe 1, Blatt 11).

2. (a) Seien N_1 und N_2 Untermannigfaltigkeiten des euklidischen $\mathbb{R}^n$ jeweils versehen mit der induzierten riemannschen Metrik und $\gamma : I \to N_1 \cap N_2$ eine C^∞-Kurve, so dass für alle $t \in I$ gilt:
$$T(N_1)_{\gamma(t)} = T(N_2)_{\gamma(t)}.$$
Zeigen Sie: Ist $V \in \Gamma(\gamma^* TN_1)$ parallel bzgl. des Levi-Civita-Zusammenhangs von N_1, so gilt $V \in \Gamma(\gamma^* TN_2)$ und V ist parallel bzgl. des Levi-Civita-Zusammenhangs von N_2.

   (b) Seien (M, g) und $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ riemannsche Mannigfaltigkeiten und $F : M \to \widetilde{M}$ eine Isometrie. Mit ∇, $\widetilde{\nabla}$ seien die Levi-Civita-Zusammnenhänge von g, $\widetilde{g}$ bezeichnet. Zeigen Sie:
Sind $\widetilde{X}$, $\widetilde{Y} \in \Gamma(T\widetilde{M})$ F-verwandt zu X, $Y \in \Gamma(TM)$ (d.h. es gilt $F_* \circ X \circ F^{-1} = \widetilde{X}$ und $F_* \circ Y \circ F^{-1} = \widetilde{Y}$), so ist $\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}} \widetilde{Y}$ F-verwandt zu $\nabla_X Y$.
Folgern Sie daraus, dass das Bild eines parallelen Vektorfeldes V entlang einer glatten Kurve γ auf M unter der Isometrie F ein paralleles Vektorfeld entlang $F \circ \gamma$ auf $\widetilde{M}$ ist.

3. Sei M C^∞-Mannigfaltigkeit und ∇ linearer Zusammenhang auf TM. Zeigen Sie, dass der Ausdruck
$$\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$
in jedem seiner 3 Argumente X, Y und $Z \in \Gamma(TM)$ $C^\infty(M, \mathbb{R})$-homogen ist (vgl. Blatt 12, Aufgabe 4).

4. Betrachten Sie den Kreiskegel $M = \{(x, y, z) \mid z^2 = x^2 + y^2,\ z > 0\}$ mit der vom euklidischen $\mathbb{R}^3$ induzierten Metrik.

   (a) Geben Sie explizit eine lokale Isometrie vom euklidischen $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ auf M an.

   (b) Berechnen Sie damit den Drehwinkel der Parallelverschiebung längs der geschlossenen Kurven $\gamma_z : [0, 2\pi] \to M$, $\gamma_z(t) = (z \cos t, z \sin t, z)$, $(z > 0)$ (benutzen Sie Aufgabe 2.(b)).

   Anleitung: Konstruieren Sie die lokale Isometrie so, dass die radialen Halbgeraden in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ auf Halbgeraden in M abgebildet werden.

Abgabe: Montag, 4. Februar, vor Beginn der Vorlesung. Bitte werfen Sie Ihre Lösungen in den dafür vorgesehenen Briefkasten im Kellergeschoss der Eckerstr. 1

Anwesenheitsaufgaben

1. Veranschaulichen Sie sich Aufgabe 4 anhand einer Skizze.