Übungen zur Vorlesung „Differentialgeometrie“ im WS 2012/2013 bei Prof. V. Bangert

Blatt 14 4. Februar 2013

Bitte geben Sie auf Ihren Lösungen Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.

1. Sei $(M, g = \langle\ ,\ \rangle)$ Riemannsche Mannigfaltigkeit.

   (a) Zeigen Sie, dass das $(1,3)$-Tensorfeld F,
   $$\langle F(X,Y)Z, W\rangle := \langle X, W\rangle\langle Y, Z\rangle - \langle X, Z\rangle\langle Y, W\rangle,$$
   die gleichen Symmetrieeigenschaften wie der Riemannsche Krümmungstensor (vgl. (9.11) (a)-(d)) hat und dass $\langle F(X,Y)Y, X\rangle = Q(X,Y)$ gilt.

   (b) Die Schnittkrümmung $K : G_2M \to \mathbb{R}$ von (M, g) ist genau dann eine konstante Funktion, d.h. $K(E) = K_0 \in \mathbb{R}$ für alle $E \in G_2M$, wenn
   $$\langle R(X,Y)Z, W\rangle = K_0(\langle X, W\rangle\langle Y, Z\rangle - \langle X, Z\rangle\langle Y, W\rangle)$$
   gilt.

2. Seien (M, g), $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Ein Diffeomorphismus $F : M \to \widetilde{M}$ heißt Homothetie (bzgl. g und $\widetilde{g}$), wenn es eine Konstante $c > 0$ gibt, so dass $F^*\widetilde{g} = c^2 g$ gilt (c heißt dann der Streckfaktor von F).

   (a) Zeigen Sie: Ist $E \subseteq TM_p$ eine Ebene, so gilt: $\widetilde{K}(F_*(E)) = \frac{1}{c^2}K(E)$.

   (b) Zeigen Sie: Ein Diffeomorphismus $F : M \to \widetilde{M}$ ist genau dann Homothetie bzgl. g und $\widetilde{g}$, wenn es eine Konstante $c > 0$ gibt, so dass für alle C^∞-Kurven $\gamma : [a, b] \to M$ gilt: $L^{\widetilde{g}}(F \circ \gamma) = c \cdot L^g(\gamma)$.

   (c) Für die Bilinearform $\langle x, y\rangle_1 = \sum_{i=1}^m x_i y_i - x_{m+1}, y_{m+1}$ auf $\mathbb{R}^{m+1}$ und $r > 0$ sei $M_r^L = \{x \in \mathbb{R}^{m+1} \mid \langle x, x\rangle_1 = -r^2, x_{m+1} > 0\}$ mit der von $\langle\ ,\ \rangle_1$ induzierten Riemannschen Metrik. Zeigen Sie: $F : M_1^L \to M_r^L$, $F(x) = rx$, ist eine Homothetie.

3. Ein linearer Zusammenhang ∇^s auf T_sM ist ein bilinearer Operator $\nabla^s : \Gamma(TM) \times \Gamma(T_sM) \to \Gamma(T_sM)$, so dass für alle $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$, $X \in \Gamma(TM)$ und $T \in \Gamma(T_sM)$ gilt:

   α) $\nabla^s_{fX}T = f\nabla^s_X T$.

   β) $\nabla^s_X(fT) = X(f)T + f\nabla^s_X(T)$.

   Bemerkung: Diese Definition kann auch auf beliebige Tensorfelder verallgemeinert werden. In der Regel schreibt man für ∇^s einfach ∇.

   (a) Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und ∇ ein linearer Zusammenhang auf TM. Zeigen Sie: Durch $(X, T) \mapsto \nabla^s_X T$ wird von ∇ ein linearer Zusammenhang ∇ auf T_sM induziert, wobei für alle $Y_1, \ldots, Y_s \in \Gamma(TM)$ gilt
   $$(\nabla_X T)(Y_1 \ldots, Y_s) = X(T(Y_1, \ldots, Y_s)) - T(\nabla_X Y_1, Y_2, \ldots, Y_s) - \cdots - T(Y_1, \ldots, Y_{s-1}, \nabla_X Y_s).$$

Zeigen Sie weiter:
Für $T_1 \in \Gamma(T_{s_1}M)$, $T_2 \in \Gamma(T_{s_2}M)$ und $X \in \Gamma(TM)$ gilt:

$$\nabla(T_1 \otimes T_2) = (\nabla_X T_1) \otimes T_2 + T_1 \otimes (\nabla_X T_2)$$

(b) Sei (M, g) Riemannsche Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie, dass ein linearer Zusammenhang ∇ auf TM genau dann riemannsch ist, wenn $\nabla_X g = 0$ für alle $X \in \Gamma(TM)$, man sagt dann g ist parallel bzgl. ∇.

4. Bestimmen Sie die Schnittkrümmung des hyperbolischen Raums.

   Betrachten sie dazu das Poincarémodell, also $B^m = \{x \in \mathbb{R}^m \mid \langle x, x\rangle < 1\}$ versehen mit der riemannschen Metrik $g_x^P = \left(\frac{2}{1-|x|^2}\right)^2 \langle\, ,\, \rangle$, und bestimmen Sie die Schnittkrümmung der von $(0, e_1)$ und $(0, e_2)$ in TM_0 aufgespannten Ebene. (Warum reicht das?)

Abgabe: Montag, 11. Februar, vor Beginn der Vorlesung. Bitte werfen Sie Ihre Lösungen in den dafür vorgesehenen Briefkasten im Kellergeschoss der Eckerstr. 1

Anwesenheitsaufgaben

1. Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $c > 0$. Zeigen Sie, dass für $\widetilde{g} := c^2 g$ gilt: g und $\widetilde{g}$ haben denselben Levi-Civita-Zusammenhang. Weiterhin gilt $R(v, w)z = \widetilde{R}(v, w)z$ für alle v,w, $z \in TM_p$.