Übungen zur Vorlesung „Differentialgeometrie“ im WS 2012/2013 bei Prof. V. Bangert

Blatt 15 (Bonusblatt) 11. Februar 2013

Bitte geben Sie auf Ihren Lösungen Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.

1. *(4 Zusatzpunkte)* Sei (M,g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit.

   (a) Sei $f \in C^\infty(m,\mathbb{R})$. Der Tensor $\nabla^2 f \in \Gamma(T_2^0 M)$,
   $$\nabla^2 f(X,Y) := g(\nabla_X \operatorname{grad} f, Y),$$
   heißt *Hesseform* von f. Berechnen Sie $\nabla^2 f$ in lokalen Koordinaten und zeigen Sie: ∇^2 ist symmetrisch und stimmt im Fall $(M,g) = (\mathbb{R}^m, \langle\,,\,\rangle)$ mit der zweiten Ableitung überein.

   (b) Sei $f \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ und $g(\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} f)$ konstant. Zeigen Sie: Die Integralkurven von $\operatorname{grad} f$ (d.h. die Lösungskurven γ von $\dot\gamma(t) = \operatorname{grad} f|_{\gamma(t)}$) sind Geodätische.

   (c) Ist $f \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ und $c : (a,b) \to M$ eine Kurve, so gilt
   $$(f \circ c)'' = \nabla^2 f(\dot c, \dot c) + g(\operatorname{grad} f, {}^c\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \dot c(t)).$$
   Folgern Sie daraus, dass falls c eine Geodätische ist $\nabla^2 f(\dot c, \dot c) = (f \circ c)''$ gilt.

2. *(4 Zusatzpunkte)* Seien (M,g) und $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Zeigen Sie:

   (a) Ist $F : M \to \widetilde{M}$ eine Homothetie (vgl. Aufgabe 2 Blatt 14) und γ Geodätische auf M, so ist $F \circ \gamma$ Geodätische auf $\widetilde{M}$.

   (b) Ist $F : (M,g) \to (M,g)$ eine Isometrie und exisiert ein Tangentialvektor $v \in TM$, so dass $F_*(v) = v$, so wird die Geodätische γ mit $\dot\gamma(0) = v$ auf sich abgebildet.

3. *(4 Zusatzpunkte)* Berechnen Sie die Exponentialabbildung $\exp_p : T{M_L^m}_p \cong \mathbb{R}^m \times \{0\} \to M_L^m$ des hyperbolischen Raums im Lorentzmodell, wobei $p = (0\ldots,0,1)$.

4. *(4 Zusatzpunkte)* Betrachten Sie folgende Abbildungen *(normale Polarkoordinaten)*:
   $$\begin{aligned} F_1 : S^1 \times \mathbb{R} &\to (\mathbb{R}^2, \langle\,,\,\rangle), & (\varphi, r) &\mapsto r(\cos\varphi, \sin\varphi) \\ F_2 : S^1 \times \mathbb{R} &\to (S^2, g_s), & (\varphi, r) &\mapsto (\sin r\cos\varphi, \sin r \sin\varphi, \cos r) \\ F_3 : S^1 \times \mathbb{R} &\to (M_L^2, g_h = \langle\,,\,\rangle_1)), & (\varphi, r) &\mapsto (\sinh(r)\cos\varphi, \sinh(r)\sin\varphi, \cosh(r)), \end{aligned}$$
   wobei $S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ und g_s die von der euklidischen Metrik auf $S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ induzierte Metrik bezeichnet.

   Zeigen Sie, dass die Kurven $r \mapsto (\varphi, r)$ durch F_1, F_2 und F_3 auf Geodätische abgebildet werden. Berechnen Sie dann die Koeffizienten der Metriken $g_1 = F_1^*\langle\,,\,\rangle$, $g_2 = F_2^* g_{st}$ und $g_3 = F_3^* g_h$ auf $S^1 \times \mathbb{R}$.

   Bemerkung: Eine analoge Aussage erhält man auch für höhere Dimensionen.

Abgabe: Montag, 18. Februar, vor Beginn der Vorlesung. Bitte werfen Sie Ihre Lösungen in den dafür vorgesehenen Briefkasten im Kellergeschoss der Eckerstr. 1