# Übungen zur Vorlesung „Differentialgeometrie“ im WS 2012/2013 bei Prof. V. Bangert

Blatt 4 12. November 2012

*Bitte geben Sie auf Ihren Lösungen Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.*

1. Seien $M$ und $N$ differenzierbare Mannigfaltigkeiten und $(p,q) \in M \times N$. Zeigen Sie:

   (a) Die Abbildung
   $$(v,w) \in TM_p \times TN_q \mapsto u \in T(M \times N)_{(p,q)}$$
   mit
   $$u(f) = v\,(f(\,\cdot\,,q)) + w\,(f(p,\,\cdot\,)) \qquad (f \in \mathcal{H}_{(p,q)}(M \times N))$$
   ist ein Vektorraum-Isomorphismus.

   (b) Ist $c : (-\varepsilon,\varepsilon) \to M \times N$ eine $C^\infty$-Kurve mit den beiden Komponenten $c_M := \pi_M \circ c$, $c_N := \pi_N \circ c$ (d.h. $c = (c_M, c_N)$), so gilt unter der Identifikation aus a)
   $$\dot{c}(0) = (\dot{c}_M(0), \dot{c}_N(0)) \in TM_p \times TN_q.$$
   *Anleitung:* Ist $f \in \mathcal{H}_{(p,q)}(M \times N)$, so betrachten Sie die Funktion $g : (-\varepsilon,\varepsilon) \times (-\varepsilon,\varepsilon) \to \mathbb{R}$, $g(t,s) := f(c_M(t), c_N(s))$ und zeigen $\lim_{t\to 0} \frac{g(t,t)-g(0,0)}{t} = D_1 g(0,0) + D_2 g(0,0)$.

2. *Rotationstorus.* Sei $0 < r < R$. Zeigen Sie:

   (a) $M := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; (\sqrt{x^2+y^2} - R)^2 + z^2 = r^2\right\}$ ist eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$.

   (b) Die Abbildung $f \colon \mathbb{R}^2 \to M$ mit
   $$f(u,v) = \big((R + r\cos 2\pi u)\cos 2\pi v, (R + r\cos 2\pi u)\sin 2\pi v, r\sin 2\pi u\big)$$
   ist ein lokaler Diffeomorphismus (d. h. jeder Punkt besitzt eine Umgebung $U$, so dass $f(U)$ offen in $M$ und $f|U \colon U \to f(U)$ ein Diffeomorphismus ist).
   Bestimmen Sie zu $(u_0,v_0) \in \mathbb{R}^2$ alle $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ mit $f(u,v) = f(u_0,v_0)$.

   (c) Fertigen Sie eine Skizze von $M$ an und zeichnen Sie die Kurven $u \mapsto f(u,\overline{v})$ und $v \mapsto f(\overline{u},v)$ für $\overline{v},\overline{u} \in \{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}\}$ ein.

3. Seien $M$, $N$ Mannigfaltigkeiten, $\dim M = m$, und $h \in C^\infty(M,N)$. Zeigen Sie:

   (a) Der Graph
   $$\operatorname{graph}(h) = \{(p, h(p)) \mid p \in M\}$$
   ist eine $m$-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $M \times N$.

   (b) Der Tangentialraum an $\operatorname{graph}(h)$ im Punkt $(p,h(p))$ ist durch
   $$\operatorname{graph}(h_{*p}) = \{(v, h_{*p}(v)) \mid v \in TM_p\} \subseteq TM_p \times TN_{h(p)}$$
   gegeben, vgl 1a).

4. Sei $b$ eine nicht ausgeartete symmetrische Bilinearform auf $\mathbb{R}^n$ mit $k := \operatorname{ind}(b) < n$. (Dabei ist der Index $\operatorname{ind}(b)$ von $b$ die maximale Dimension eines Untervektorraums, auf dem $b$ negativ definit ist.) Zeigen Sie:

   (a) $M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid b(x,x) = 1\}$ ist eine $(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$.

   (b) Für $p \in M$ gilt mit der üblichen Identifikation $TM_p = \{(p,v) \in T\mathbb{R}^n \mid b(p,v) = 0\}$.

   (c) $M$ ist diffeomorph zu $S^{n-k-1} \times \mathbb{R}^k$.

   *Anleitung:* In geeigneten kartesischen Koordinaten gilt: $b(x,x) = -\sum_{i=1}^k x_i^2 + \sum_{i=k+1}^n x_i^2$.

Abgabe: Montag, 19. November. Bitte werfen Sie Ihre Lösungen in den dafür vorgesehenen Briefkasten im Kellergeschoss der Eckerstr. 1

**Anwesenheitsaufgaben**

1. Seien $M$, $N$, $P$ glatte Mannigfaltigkeiten der Dimension $m$, $n$ bzw. $p$. Seien $f : M \to N$ und $g : N \to P$ glatte Abbildungen. Welche der Aussagen sind wahr (Beweis oder Gegenbeispiel)?

   (a) Ist $x \in M$ regulärer Punkt von $f$, so ist $f(x)$ regulärer Wert von $f$.

   (b) Ist $f^{-1}(y)$ eine $(m-n)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $M$, so ist $x$ ein regulärer Wert von $f$.

   (c) Ist $x$ ein regulärer Punkt von $f$ und $f(x)$ ein regulärer Punkt von $g$, so ist $x$ ein regulärer Punkt von $f \circ g$.

2. Sei $c : ]a,b[ \to M$ eine $C^\infty$-Kurve und $t_0 \in ]a,b[$. Definiere $\tilde{c} : ]a-t_0, b-t_0[ \to M$ durch $\tilde{c}(t) = c(t+t_0)$ $(\Rightarrow \tilde{c}(0) = c(t_0))$.

   Zeige: $\dot{c}(t_0) = \dot{\tilde{c}}(0)$.