Übungen zur Vorlesung „Differentialgeometrie“ im WS 2012/2013 bei Prof. V. Bangert

Blatt 5 19. November 2012

Bitte geben Sie auf Ihren Lösungen Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.

1. (a) Die Funktion “Rang” $\mathrm{rg} : \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}$ ist unterhalbstetig, d.h. für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ ist die Menge
$$\{A \in \mathbb{R}^{m\times n} \mid \mathrm{rg}(A) > \alpha\}$$
offen in $\mathbb{R}^{m\times n} (\cong \mathbb{R}^{mn})$.
Hinweis: Sie können benützen, dass es für $l = \mathrm{rg}(A)$ eine $(l \times l)$-Untermatrix B von A gibt, für die $\det B \neq 0$ gilt.

   (b) Sind M, N C^∞-Mannigfaltigkeiten und ist $h \in C^\infty(M, N)$, so ist die Menge der regulären Punkte von h offen in M (sie kann die leere Menge sein, z.B. falls $\dim M < \dim N$). Ebenso ist die Menge der Punkte $p \in M$, für die h_{*p} injektiv ist, eine offene Teilmenge von M.

2. *(6 Punkte)* Sei M eine m-dimensionale C^∞-Mannigfaltigkeit, $\mathcal{A}$ ein Atlas auf M und $\pi : TM \to M$ das Tangentialbündel von M. Bezeichne
$$\mathcal{A}_* := \{\phi_* : \pi^{-1}(U^\phi) \subseteq TM \to V^\phi \times \mathbb{R}^m \subseteq \mathbb{R}^{2m} \mid \phi \in \mathcal{A}\}.$$
Zeigen Sie:
   (a) $\mathcal{A}_*$ ist ein $(2m)$-dimensionaler topologischer Atlas auf TM, vgl. Blatt 1 Aufgabe 1.
   (b) TM ist mit der von $\mathcal{A}_*$ induzierten Topologie Hausdorff'sch und besitzt eine abzählbare Basis.
   (c) $\mathcal{A}_*$ ist ein $(2m)$-dimensionaler C^∞-Atlas auf TM.
   (d) $\pi : TM \to M$ ist eine Submersion.
   (e) Ist N eine C^∞-Mannigfaltigkeit und $h \in C^\infty(M, N)$, dann ist $h_* \in C^\infty(TM, TN)$.

3. *(6 Punkte) Symplektische Gruppe.* Sei $E_n \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ die Einheitsmatrix und $I := \left(\begin{smallmatrix} 0 & -E_n \\ E_n & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Es gilt $I^2 = -E_{2n}$. Dann ist
$$\mathrm{SP}(2n, \mathbb{R}) := \{\, A \in \mathbb{R}^{2n\times 2n} \mid A^\top I A = I \,\}$$
die Menge aller Matrizen A, die die Bilinearform $B(v, w) := v^\top I w$ invariant lassen, d.h.: $B(Av, Aw) = B(v, w)$ für alle v, $w \in \mathbb{R}^{2n}$. Zeigen Sie:
   (a) $\mathrm{SP}(2n, \mathbb{R})$ ist eine Gruppe bezüglich der Matrizenmultiplikation.
   (b) $\mathrm{SP}(2n, \mathbb{R})$ ist Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{2n\times 2n}$. Betrachten Sie dazu die Abbildung $h \colon \mathbb{R}^{2n\times 2n} \to \{\, S \in \mathbb{R}^{2n\times 2n} \mid S^\top = -S \,\}$ mit $h(A) := A^\top I A$ und zeigen Sie, dass I ein regulärer Wert von h ist.
Hinweis: Zeigen Sie: Für jede schiefsymmetrische Matrix S und jedes $A \in \mathrm{SP}(2n, \mathbb{R})$ gilt $h'(A)\, V = S$, falls $V := -\frac{1}{2} A I S$.

(c) Es gilt $\mathrm{SP}(2,\mathbb{R}) = \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$. Für kein $n \in \mathbb{N}$ ist $\mathrm{SP}(2n,\mathbb{R})$ kompakt.

(d) Es gilt
$$T\big(\mathrm{SP}(2n,\mathbb{R})\big)_{E_{2n}} = \{\, XI \mid X \in \mathbb{R}^{2n\times 2n} \text{ und } X^\top = X \,\}.$$

Hinweis: Erinnern Sie sich an die entsprechenden Überlegungen zu $\mathrm{O}(n)$.

Abgabe: Montag, 26. November, vor Beginn der Vorlesung. Bitte werfen Sie Ihre Lösungen in den dafür vorgesehenen Briefkasten im Kellergeschoss der Eckerstr. 1

Anwesenheitsaufgaben

1. Zeigen Sie: Die Funktion "Rang" $\mathrm{rg} : \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}$ ist nicht stetig.
2. Zeigen Sie: Die orthogonale Gruppe $\mathcal{O}(n) \subseteq \mathbb{R}^{n\times n}$ ist kompakt.