Übungen zur Vorlesung „Differentialgeometrie“ im WS 2012/2013 bei Prof. V. Bangert

Blatt 6 — 26. November 2012

Bitte geben Sie auf Ihren Lösungen Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.

1. Sei (X, ρ) metrischer Raum und

$$\mathrm{Iso}(X, \rho) = \{h : X \to X \mid h \text{ Isometrie von } \rho\}$$

seine Isometriegruppe. Für die Untergruppe $\Gamma \subseteq \mathrm{Iso}(X, \rho)$ gelte:

Es existiert ein $\delta > 0$, so dass für alle $x \in X$ und für alle $h \in \Gamma \setminus \{\mathrm{id}_X\}$ gilt:

$$\rho(x, h(x)) \geq \delta.$$

Dann operiert Γ frei und eigentlich diskontinuierlich auf X.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass für alle $p, q \in M$ höchstens ein $p' \in \Gamma p$ existiert, so dass $\rho(p', q) < \frac{\delta}{2}$. Sehen Sie sich auch den Beweis für den Fall an, dass $\mathbb{Z}^m$ durch Translation auf $\mathbb{R}^m$ operiert.

2. Zeigen Sie, dass eine Mannigfaltigkeit M genau dann orientierbar ist, wenn sie einen Atlas $\mathcal{A}$ besitzt, so dass für alle Karten φ, $\psi \in \mathcal{A}$ und alle $x \in \varphi(U^\psi \cap U^\varphi)$ gilt:

$$\det D(\psi \circ \varphi^{-1})\,(x) > 0,$$

wobei $D(\psi \circ \varphi^{-1})\,(x)$ die Jacobimatrix von $\psi \circ \varphi^{-1}$ an der Stelle x bezeichnet.

3. *Möbiusband.* Sei $M := \mathbb{R} \times (-1, 1)$ und

$$\Gamma := \big\{h \in \mathrm{Diff}(M) \;\big|\; \exists n \in \mathbb{Z}\ \forall (x, y) \in M \colon h(x, y) = (x + n, (-1)^n y)\big\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass Γ frei und eigentlich diskontinuierlich auf M operiert.

M/Γ wird Möbiusband genannt. Für $(x, y) \in M$ sei $a(x) := (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x, 0)$, $b(x) := \cos(\pi x)\, a(x) + \sin(\pi x)\, e_3$ und $g(x, y) := a(x) + y\, b(x) \in \mathbb{R}^3$.

(b) Zeigen Sie:
Es gibt genau eine Abbildung $f \colon M/\Gamma \to \mathbb{R}^3$, so dass $f \circ \pi = g$.
Diese Abbildung f ist eine Einbettung.

(c) Skizzieren Sie das Bild $f(M/\Gamma)$.

4. *Veroneseeinbettung* Sei $i : S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ die Standardeinbettung und $\pi : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}P^2$ die kanonische Projektion.

(a) Zeigen Sie, dass $\pi \circ i : S^2 \to \mathbb{R}P^2$ ein lokaler Diffeomorphismus ist und $\pi \circ i(x) = \pi \circ i(y) \Leftrightarrow x = y$ oder $x = -y$.

(b) Sei $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definiert durch:

$$F(x, y, z) = (x^2 - y^2, xy, xz, yz).$$

Zeigen Sie, dass $F \circ i$ eine Einbettung des $\mathbb{R}P^2$ in den $\mathbb{R}^4$ induziert.

Hinweis: Es genügt zu zeigen, dass $F \circ i$ eine injektive Immersion induziert. Vgl. (3.5).

Abgabe: Montag, 3. Dezember, vor Beginn der Vorlesung. Bitte werfen Sie Ihre Lösungen in den dafür vorgesehenen Briefkasten im Kellergeschoss der Eckerstr. 1

Anwesenheitsaufgaben

1. Die offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}$ sei nichtleer, und es gelte

$$U + r \subseteq U$$

für alle $r \in \mathbb{Q}$. Dann gilt $U = \mathbb{R}$.

Gibt es offene Mengen $\mathbb{Q} \subseteq U \neq \mathbb{R}$?

2. *Der reelle projektive Raum* Auf $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ seien $x \sim y$ genau dann, wenn ein $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ existiert, so dass $x = \lambda y$. Dann heißt die Menge der Äquivalenzklassen $\frac{\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}}{\sim}$ versehen mit der Quotiententopologie bezüglich der Standardprojektion *reeller projektiver Raum.* Analog zu $\mathbb{C}P^n$ lässt sich leicht zeigen, dass folgende Menge einen C^∞-Atlas von $\mathbb{R}P^n$ darstellt:

$$\mathcal{A} = \{\varphi_i : U_i \to \mathbb{R}^n,\ i \in \{0, \ldots, n\}\},$$

wobei $U_i = \{[x] \in \mathbb{R}P^n \mid x_i \neq 0\}$ und $\varphi_i([x]) = \frac{1}{x_i}(x_0, \ldots x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$.

Zeigen Sie:

Die Abbildung $\tilde{\pi} : S^n \to \mathbb{R}P^n$, $x \to [x]$, ist eine Immersion und es gilt:

$$\tilde{\pi}(x) = \tilde{\pi}(y) \Leftrightarrow x = -y.$$

Folgern Sie daraus, dass $S^n/\{\pm \mathrm{id}_{S^n}\}$ diffeomorph zu $\mathbb{R}P^n$ ist.