Übungen zur Vorlesung „Differentialgeometrie“ im WS 2012/2013 bei Prof. V. Bangert

Blatt 7 3. Dezember 2012

Bitte geben Sie auf Ihren Lösungen Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.

1. *Orientierungsüberlagerung.* Sei $m \geq 1$ und M eine zusammenhängende m-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit. Betrachten Sie $\overline{M} := \{(p,\sigma) \mid p \in M,\ \sigma \in \mathscr{O}(TM_p)\}$ und die Projektion $\pi\colon \overline{M} \to M$ mit $\pi(p,\sigma) := p$. Zeigen Sie:

   (a) Es existiert genau eine Topologie und differenzierbare Struktur auf $\overline{M}$, so dass für jede Karte φ von M die Menge $\overline{U}^{\varphi}$ offen und die Abbildung $\pi|\overline{U}^{\varphi}$ ein Diffeomorphismus ist, wobei
   $$\overline{U}^{\varphi} := \left\{(p,\sigma) \mid p \in U^{\varphi},\ \sigma = \left[\left(\partial_1^{\phi}|_p, \ldots, \partial_m^{\phi}|_p\right)\right]\right\} \subseteq \overline{M}.$$

   (b) Die Abbildung $F\colon \overline{M} \to \overline{M}$ mit $(p,\sigma) \mapsto (p,\overline{\sigma})$, wobei $\overline{\sigma}$ die zu σ entgegengesetzte Orientierung ist, ist ein Diffeomorphismus. $\overline{M}$ ist orientierbar und M ist diffeomorph zu $\overline{M}/\{F, \mathrm{id}_{\overline{M}}\}$.

   (c) M ist genau dann nicht orientierbar, wenn $\overline{M}$ zusammenhängend ist.

2. Die Funktionen F und $G\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ seien definiert durch $F(x,y,z) := (x^2+y^2-4)^2+z^2$ und $G(x,y,z) := (4x^2(1-x^2)-y^2)^2+z^2$.

   (a) Zeigen Sie, dass $F^{-1}(1)$ und $G^{-1}(\frac{1}{4})$ Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^3$ sind.

   (b) Skizzieren Sie diese Untermannigfaltigkeiten.
   Anleitung: Betrachten Sie zunächst $F^{-1}(0)$ und $G^{-1}(0)$.

   Zeigen Sie für $i = 1, 2$.

   (c) M_i wird durch $-\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ auf sich abgebildet.

   (d) $\Gamma := \{\mathrm{id}_{M_i}, (-\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})|M_i\}$ operiert frei und eigentlich diskontinuierlich auf M_i.

   (e) M_i/Γ ist nicht orientierbar.
   Hinweis: Nach Aufgabe 3b) ist $M_{1/2}$ orientierbar.

3. Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit. Eine C^{∞}-Abbildung $V : M \to T\mathbb{R}^n$ mit der Eigenschaft $\pi \circ V = \mathrm{id}_M$, heißt *normales Vektorfeld auf* M, falls für jeden Punkt $p \in M$ gilt: $V(p) \in (TM_p)^{\perp} := \{(p,v) \in T\mathbb{R}^n_p \mid \forall\ (p,w) \in TM_p :\ \langle v,w\rangle = 0\}$.

   Sei nun M Urbild eines regulären Wertes, d.h. es existiere eine glatte Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ und ein regulärer Wert $y \in \mathbb{R}^k$ von f, so dass $M = f^{-1}(y)$.

   Zeigen Sie:

   (a) Es existieren k normale Vektorfelder $V_1, \ldots, V_k$ auf M, so dass an jedem Punkt $p \in M$ die Vektoren $V_1(p), \ldots, V_k(p)$ das orthogonale Komplement $(TM_p)^{\perp}$ von TM_p aufspannen.
   Hinweis: Betrachten Sie die Komponentenfunktionen von f und deren Gradienten.

(b) M ist orientierbar.

4. (a) Sei X ein Vektorfeld auf M und $c : (\alpha, \omega) \to M$ eine maximale Integralkurven von X. Zeigen Sie, dass genau einer der folgenden Fälle eintritt:
   i. c ist konstant,
   ii. c ist injektiv,
   iii. c ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert und periodisch (d.h. es existiert ein $T > 0$ mit $c(t + T) = c(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$,) und es existiert eine Einbettung $\overline{c} : \mathbb{R}/T\mathbb{Z} \to M$ mit $\overline{c}(\pi(t)) = c(t)$.

   (b) Ist X ein beschränktes Vektorfeld auf $\mathbb{R}^n$ (d.h. X hat die Gestalt $X(p) = (p, V(p))$, wobei $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ beschränkt ist), so ist X vollständig.

   Hinweis: Satz (5.3).

Abgabe: Montag, 10. Dezember, vor Beginn der Vorlesung. Bitte werfen Sie Ihre Lösungen in den dafür vorgesehenen Briefkasten im Kellergeschoss der Eckerstr. 1

Anwesenheitsaufgaben

1. Seien $o, \tilde{o}$ zwei Orientierungen einer glatten Mannigfaltigkeit M.

   Zeigen Sie: Die Mengen $\{p \in M \mid o(p) = \tilde{o}(p)\}$ ist offen.

2. Zeigen Sie:

   $o : S^2 \to \bigcup_{p \in S^2} \mathscr{O}(TS^2_p)$, $p \mapsto [(v_1, v_2)]$, wobei $[(p, v_1, v_2)]$ eine positiv orientierte Basis von $\mathbb{R}^3$ ist, ist eine Orientierung von S^2.