Übungen zur Vorlesung „Differentialgeometrie“ im WS 2012/2013 bei Prof. V. Bangert

Blatt 8 10. Dezember 2012

Bitte geben Sie auf Ihren Lösungen Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.

1. (a) Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und seien Γ_1, Γ_2 Untergruppen von $\mathrm{Diff}(M)$, die frei und eigentlich diskontinuierlich auf M operieren. Zeigen Sie:

   Wenn die Untergruppen Γ_1, Γ_2 in $\mathrm{Diff}(M)$ zueinander konjugiert sind (d.h. wenn es ein $h \in \mathrm{Diff}(M)$ gibt mit $h\Gamma_1 h^{-1} = \Gamma_2$), so sind M/Γ_1 und M/Γ_2 diffeomorph.

   (b) Sei $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^m$ ein Gitter, d.h. es existiert eine Basis $(v_1, v_2, \ldots, v_m)$ des $\mathbb{R}^m$, so dass $\Gamma = \{\sum_{i=1}^m n_i v_i \mid n_i \in \mathbb{Z}\}$. Γ operiert durch Translation frei und eigentlich diskontinuierlich auf dem $\mathbb{R}^m$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}^m/\Gamma$ und $\mathbb{R}^m/\mathbb{Z}^m$ diffeomorph sind.

2. Betrachten Sie $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ mit der Projektion $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{T}^2$. Sei $a \in \mathbb{R}$ und $\Phi : \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{T}^2$ der lineare Fluss mit Richtungsvektor $(1, a)$, d.h. für alle $x \in \mathbb{R}^2$, $t \in \mathbb{R}$ gilt:

   $$\Phi_t(\pi(x)) = \pi(x + t(1, a)).$$

   Zeigen Sie:

   (a) Ist $a \in \mathbb{Q}$, so sind die Flusslinien von Φ periodisch.

   (b) Ist $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, so sind die Flusslinien injektiv und dicht in $\mathbb{T}^2$.

   Hinweis: Zu jedem $n \in \mathbb{Z}$ sei $m_n \in \mathbb{Z}$ die größte ganze Zahl $\leq na$, d.h. $na - m_n \in [0, 1)$. Die Folge $(na - m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ muss dann einen Häufungspunkt in $[0, 1]$ haben. Benutzen Sie dies, um zunächst zu zeigen, dass die Folge $\Phi_n(\pi(x))$ dicht liegt auf dem Kreis $\pi(x + \{0\} \times \mathbb{R}) \subseteq \mathbb{T}^2$.

3. Eine Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ heißt Integral eines Flusses $\Phi : M \times \mathbb{R} \to M$ eines Vektorfeldes $X \in \Gamma(TM)$, wenn für jede Flusslinie $c(t) = \Phi(p, t)$ gilt: $f \circ c = \text{const}$.

   (a) Zeigen Sie: Ist $f : M \to \mathbb{R}$ differenzierbar, so gilt:

   $$f \text{ Integral} \;\Leftrightarrow\; X(f) = 0.$$

   (b) Sei $V \in C^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ (genannt "Potential"). Die Newtonschen Bewegungsgleichung

   $$x''(t) = -\operatorname{grad} V(x(t)) \quad (= -(D_1 V(x(t)), \ldots, D_m V(x(t))))$$

   lässt sich durch

   $$x'(t) = y(t) \tag{1}$$
   $$y'(t) = -\operatorname{grad} V(x(t)) \tag{2}$$

   als gewöhnliche Differentialgleichung 1.Ordnung auf $\mathbb{R}^{2m}$ schreiben. Das zugehörige Vektorfeld auf $\mathbb{R}^{2m}$ ist

   $$X(x, y) = (x, y, y, -\operatorname{grad} V(x)) \in T(\mathbb{R}^{2m})_{(x,y)}.$$

   Zeigen Sie: Die "Energie" $E : \mathbb{R}^{2m} \to \mathbb{R}$, $E(x, y) = \frac{1}{2}|y|^2 + V(x)$, ist Integral des Flusses von X.

(c) Der Fluss $\Phi : M \times \mathbb{R} \to M$ besitze eine Flusslinie, die dicht in M ist. Dann ist jedes stetige Integral von Φ konstant.

4. Zu $k \in \mathbb{Z}^m \setminus \{0\}$ sei $\tilde{f}_k : \mathbb{R}^m \to S^1$ definiert durch $\tilde{f}_k(x) = e^{2\pi i \langle k,x \rangle}$. Bezeichne weiterhin $\pi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m/\mathbb{Z}^m$ die kanonische Projektion. Zeigen Sie:

   (a) Es gibt genau eine Funktion $f_k : \mathbb{T}^m \to S^1$ mit $f_k \circ \pi = \tilde{f}_k$ und f_k ist Submersion.

   (b) Ist $v \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ und gilt $\langle v, k \rangle = 0$, so ist keine Flusslinie des linearen Flusses $\Phi_t(\pi(x)) = \pi(x + tv)$ dicht auf $\mathbb{T}^m$.

Abgabe: Montag, 17. Dezember, vor Beginn der Vorlesung. Bitte werfen Sie Ihre Lösungen in den dafür vorgesehenen Briefkasten im Kellergeschoss der Eckerstr. 1

Anwesenheitsaufgaben

1. Sei $\Phi\colon M \times \mathbb{R} \to M$ von der Klasse C^∞, und es gelte $\Phi_0 = \mathrm{id}_M$ und $\Phi_t \circ \Phi_s = \Phi_{s+t}$ für alle $s, t \in \mathbb{R}$, wobei $\Phi_t(p) := \Phi(p, t)$. Zeigen Sie: Es existiert genau ein Vektorfeld $X \in \Gamma(TM)$, dessen Fluss gerade Φ ist (d.h. so dass $\Phi = \Phi^X$ gilt).