Übungen zur Vorlesung „Differentialgeometrie“ im WS 2012/2013 bei Prof. V. Bangert

Blatt 9 17. Dezember 2012

Bitte geben Sie auf Ihren Lösungen Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.

1. Berechen Sie die Flüsse und Lieklammern der folgenden Vektorfelder auf $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$ in den Standardkoordinaten (x_1, x_2) bzw. (x_1, x_2, x_3):

   (a) $X_1(x_1, x_2) = (x_1, x_2, -x_2, x_1)$ und $X_2(x_1, x_2) = (x_1, x_2, x_1, x_2)$

   (b) $Y_1(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3, -x_2, x_1, 0)$ und $Y_2(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3, 0, -x_3, x_2)$

2. Auf $\mathbb{R}^2$ seien die Vektorfelder $X(p) = (p, V(p))$ und $Y(p) = (p, W(p))$ gegeben durch $V(x, y) = (y, -\sin x)$ und $W(x, y) = (y, \sin x)$. Überprüfen Sie, ob die zugehörigen Flüsse Φ^X und Φ^Y kommutieren.

3. Seien X und Y C^∞-Vektorfelder auf $\mathbb{R}^n$ mit zugehörigen Flüssen Φ^X und Φ^Y. Sei $p \in \mathbb{R}^n$ beliebig, sei $\varepsilon > 0$ und $H\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^n$ gegeben durch $H(s, t) := \big(\Phi_s^Y \circ \Phi_t^X\big)(p) - \big(\Phi_t^X \circ \Phi_s^Y\big)(p)$.

   (a) Zeigen Sie:
   $$\frac{\partial^2 H}{\partial t\, \partial s}(0, 0) = \big[X, Y\big](p).$$
   Anleitung: Berechnen Sie zunächst $\frac{\partial H}{\partial s}(0, t)$ und verwenden Sie dann Lemma (5.9).

   (b) Zeigen Sie:
   $$\lim_{t \to 0} \frac{H(t, t)}{t^2} = \big[X, Y\big](p).$$
   Bemerkung: Es gilt sogar allgemeiner $H(s, t) = st(\big[X, Y\big](p) + R(s, t))$ mit $\lim_{(s,t)\to(0,0)} R(s, t) = 0$.

   (c) Veranschaulichen Sie sich die Bedeutung dieser Formel durch eine Skizze.

4. Ist V ein endlichdimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum, so bezeichne $L_s(V)$ den Vektorraum aller multilinearen Abbildungen
   $$A\colon \underbrace{V \times \cdots \times V}_{s\text{-mal}} \to V$$
   und $\mathrm{End}(V) = L_1(V)$.

   Zeigen Sie: Durch
   $$\Phi(A)(v_1, \ldots, v_s, \pi) := \pi(A(v_1, \ldots, v_s)) \text{ für } v_1, \ldots, v_s \in V,\ \pi \in V^*$$
   wird eine lineare Abbildung $\Phi\colon L_s(V) \to T_s^1(V)$ definiert. Φ ist ein Vektorraumisomorphismus.

Abgabe: Montag, 7. Januar, vor Beginn der Vorlesung. Bitte werfen Sie Ihre Lösungen in den dafür vorgesehenen Briefkasten im Kellergeschoss der Eckerstr. 1

Anwesenheitsaufgaben

1. Seien V, W, Z endlich-dimensionale $\mathbb{R}$-Vektorräume und $L \in \mathrm{Hom}(V, W)$ und $s \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie, dass die Abbildung $L^*\colon T^0_s(W) \to T^0_s(V)$, $L^*(T)(v_1, \dots, v_s) := T(Lv_1, \dots, Lv_s)$ (für alle $T \in T^0_s(W)$ und alle $v_1, \dots, v_s \in V$) ein Vektorraumhomomorphismus ist, für den gilt:

   (a) Ist $T \in T^0_s(W)$ und $T' \in T^0_{s'}(W)$, so gilt $L^*(T \otimes T') = L^*(T) \otimes L^*(T')$.

   (b) Ist $K \in \mathrm{Hom}(W, Z)$, so ist $(K \circ L)^* = L^* \circ K^*$.

2. Sei V ein reeller Vektorraum und $\pi^1, \dots, \pi^s \in V^*$. Zeigen Sie:

   Genau dann ist $\pi^1 \otimes \cdots \otimes \pi^s = 0$, wenn eines der π^i die Nullabbildung ist.