Übungen zur Vorlesung „Analysis I“
im WiSe 2013/14 bei Prof. V. Bangert

Blatt 02 28. Oktober 2013

Bitte geben Sie auf Ihren Lösungen die Nummer Ihrer Übungsgruppe und Ihren Namen an.

1. (a) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion:
   Ist $a \in \mathbb{R}$ und $a > 0$, so gilt für alle $n \in \mathbb{N}$: $a^n > 0$.
   Die Definition von a^n finden Sie in den Anwesenheitsaufgaben.

   (b) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion:
   Sind $a, b \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq b < a$, so gilt für alle $n \in \mathbb{N}$: $b^n < a^n$.

2. Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ und es gelte $a < c < b$. Zeigen Sie: Es existiert genau eine Zahl $t \in \mathbb{R}$ mit $c = ta + (1-t)b$ und für dieses t gilt $0 < t < 1$. Berechnen Sie t explizit, falls $a = 1$, $b = 3$ und $c = \frac{5}{2}$.

3. Wir definieren für $a \in \mathbb{R}$ und $b > 0$ die b-Umgebung um a durch:
$$U_b(a) = \{c \in \mathbb{R} \mid |c - a| < b\}.$$
   (a) Skizzieren Sie folgende Mengen auf dem Zahlenstrahl: $U_2(3)$ und $U_{\frac{1}{2}}(\frac{3}{2})$.

   (b) Sei $R > 0$ und $a \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie: Ist $c \in U_R(a)$ und $0 < r \leq R - |a - c|$, so gilt:
$$U_r(c) \subseteq U_R(a).$$

4. Sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper (vgl. Anwesenheitsaufgaben für die Definition), in dem ein Element x_0 existiert, für das $x_0^2 = -1_K$ gilt.

   Zeigen Sie: Es existiert keine Anordnung „$>$“ von K, für die die Axiome (A_1) und (A_2) gelten.

Abgabe: Montag, 04. November, bis 18 Uhr. Bitte werfen Sie Ihre Lösungen in den dafür vorgesehenen Briefkasten im Kellergeschoss der Eckerstr. 1

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt

Anwesenheitsaufgaben

Für $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ definieren wir induktiv

$$a^1 := a \text{ und } a^{n+1} := a \cdot a^n.$$

1. Zeigen Sie mit vollständiger Induktion:

   Sind $a, b \in \mathbb{R}$, so gilt für alle $n \in \mathbb{N}$: $(ab)^n = a^n \cdot b^n$.

Sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper, d.h. K ist eine Menge mit mindestens zwei Elementen $0_K \neq 1_K$ und zwei Verknüpfungen $+, \cdot$, so dass $(K_1) - (K_5)$ gelten.

2. Es sei $P \subseteq K \setminus \{0_K\}$ Menge, so dass für $N := \{-x \mid x \in P\}$ gilt:

   (a) $P \cap N = \emptyset$

   (b) $P \cup N \cup \{0_K\} = K$

   (c) $x, y \in P \Rightarrow x + y \in P$ und $x \cdot y \in P$.
   Überlegen Sie: Wenn wir für $x \in K$ definieren

   $$x > 0_K :\Leftrightarrow x \in P,$$

   so erhalten wir eine Anordnung von K, die die Anordnungsaxiome (A_1) und (A_2) erfüllt.

3. Auf dem Körper K existiere eine Anordnung $<$, die die Axiome (A_1) und (A_2) erfüllt. Folgern Sie, dass $-1_K < 0_K$.