Übungen zur Vorlesung „Analysis I“ im WiSe 2013/14 bei Prof. V. Bangert

Blatt 04 — 11. November 2013

Bitte geben Sie auf Ihren Lösungen die Nummer Ihrer Übungsgruppe und Ihren Namen an.

1. Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert uneigentlich (oder divergiert bestimmt) gegen* ∞, falls gilt: Zu jedem $K > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{R}$, so dass $a_n > K$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n > N$.

   Wir schreiben $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ oder $a_n \to \infty$. (Uneigentliche Konvergenz gegen $-\infty$ wird analog definiert.)

   Zeigen Sie: Für eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt:

   (a) Aus $a_n \to \infty$ folgt $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$.

   (b) Aus $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ und $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt $\frac{1}{a_n} \to +\infty$.

   Hinweis: Vergleichen Sie mit Definition 1.5 und Satz 1.5 aus Kapitel 1 des Skripts zur Vorlesung.

2. Untersuchen Sie nachstehende Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

   (a) $a_n := \dfrac{n!}{n^n}$

   (b) $b_n := \dfrac{\binom{n}{k}}{n^k}$ für $k \in \mathbb{N}$ fest gewählt.

3. Für $n \geq 2$ sei die Folge $(a_n)_{n\geq 2}$ definiert durch

$$a_n = \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{(n-1)(n+1)}\,.$$

   (a) Beweisen Sie

$$a_n = \frac{(n-1)(3n+2)}{4n(n+1)}\,, \quad \text{für alle } n \geq 2.$$

   (b) Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\geq 2}$ konvergiert, und bestimmen Sie den Grenzwert.

4. Gegeben sei eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die durch $b_n := a_{n+1} - a_n$ definiert ist. Zeigen Sie:

   (a) Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, so konvergiert $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $0 \in \mathbb{R}$.

   (b) Für alle natürlichen Zahlen $m < n$ gilt:

$$\sum_{k=m}^{n-1} b_k = a_n - a_m.$$

   (c) *(2 Bonuspunkte)* Falls ein $q \in \mathbb{R}$ mit $0 < q < 1$ existiert, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $|b_n| < q^n$, so ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge.

Abgabe: Montag, 18. November, bis 18 Uhr. Bitte werfen Sie Ihre Lösungen in den dafür vorgesehenen Briefkasten im Kellergeschoss der Eckerstr. 1

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt

Anwesenheitsaufgaben

1. Zeigen Sie: Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist genau dann beschränkt, wenn die Folge $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ nach oben beschränkt ist.

2. Untersuchen Sie nachstehende Folge auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

$$a_n := \frac{3n^3 - \frac{1}{n^3}}{n(n^2-1)}$$

3. Beweisen Sie folgende Aussage, die im Beweis von Satz 1.2 in Kapitel 2 benutzt wurde:

   Sind $a_n, a \in \mathbb{R}$, so gilt:
$$|a_n - a| < 1 \Rightarrow |a_n| < |a| + 1$$

4. *Zusatzaufgabe:*

   Zeigen Sie: Ist $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, so gilt für alle natürlichen Zahlen $m < n$: $\sum_{i=m}^{n} q^i = \frac{q^m - q^{n+1}}{1-q}$.