Übungen zur Vorlesung „Analysis I“ im WiSe 2013/14 bei Prof. V. Bangert

Blatt 05 — 18. November 2013

Bitte geben Sie auf Ihren Lösungen die Nummer Ihrer Übungsgruppe und Ihren Namen an.

1. *Das Paradoxon von Achilles und der Schildkröte:* Dieses „Paradoxon“ stammt vom griechischen Philosophen Zenon von Elea (495-435 v.Chr.). Achilles veranstaltet einen Wettlauf mit einer (ziemlich schnellen) Schildkröte. Achilles kann aber zehnmal schneller als die Schildkröte laufen. Als fairer Mann gibt er der Schildkröte einen Vorsprung von 10 Ellen (eine Elle ist eine Längeneinheit). Die Schildkröte und Achilles starten zur gleichen Zeit.

   (a) Berechnen Sie mit Hilfe des Zusammenhangs Strecke = Geschwindigkeit mal Zeit, wie weit Achilles laufen muss, um die Schildkröte einzuholen.

   (b) Folgende Beschreibung „zeigt“, dass Achilles die Schildkröte, entgegeben aller Erwartung (das „Paradoxon“) nie einholen wird: Hat Achilles die ersten 10 Ellen durcheilt, so ist die Schildkröte um eine Elle vorangekommen. Hat Achilles diese Elle zurückgelegt, beträgt der Vorsprung der Schildkröte immer noch 1/10 Ellen. Bringt Achilles diese Strecke hinter sich, beträgt der Vorsprung der Schildkröte noch 1/100 Ellen, usw. Der Vorsprung der Schildkröte wird zwar immer kleiner, aber er wird nie Null!

   Benutzen Sie diese Beschreibung, um die in a) berechnete Strecke mittels einer Reihe zu berechnen.

2. Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit Grenzwert a und $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Abbildung, so dass gilt:

$$\text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ ist die Menge } \{k \in \mathbb{N} \mid \varphi(k) = n\} \text{ endlich (möglicherweise leer).} \qquad (1)$$

   (a) Zeigen Sie: Die Folge $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $b_k := a_{\varphi(k)}$ ist konvergent mit Grenzwert a.

   (b) Zeigen Sie, dass die Aussage aus Aufgabenteil a) ohne Voraussetzung (1) falsch ist.

3. Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$b_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

$$c_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)^2}$$

   Zeigen Sie:

   (a) Die Folgen $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind monoton wachsend und beschränkt, also konvergent.

   Hinweis: Zeigen Sie, dass $b_n < a_n + 1$ für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ und $(a_n)_{n\geq 2}$ die Folge aus Aufgabe 3 von Blatt 4.

(b) Es gilt $\lim_{n\to\infty} c_n = \frac{3}{4} \lim_{n\to\infty} b_n$.

Hinweis: Suchen Sie eine Beziehung zwischen b_n, b_{2n} und c_n. Es ist nicht notwendig die Grenzwerte zu bestimmen.

4. Sei $k \in \mathbb{N}$ und $q \in \mathbb{R}$ mit $|q| < 1$. Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $a_n = n^k q^n$, eine Nullfolge ist.

   Hinweis: Betrachten Sie die zugehörige Folge der Beträge und setzen Sie $|q| = \frac{1}{1+x}$. Sie können Blatt 4, Aufgabe 2(b) nutzen.

Abgabe: Montag, 25. November, bis 18 Uhr. Bitte werfen Sie Ihre Lösungen in den dafür vorgesehenen Briefkasten im Kellergeschoss der Eckerstr. 1

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt

Anwesenheitsaufgaben

1. Gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ und $a < b$, so existiert ein $N \in \mathbb{R}$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n > N$ gilt: $a_n < b_n$.

2. Zeigen Sie: Es existiert für jede positive, reelle Zahl x ein Dezimalbruchentwicklung, d.h. eine natürliche Zahl n und eine Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{Z},k\leq n}$, $a_k \in \{0, 1, \ldots 9\}$, so dass

$$x = \sum_{k=-\infty}^{n} a_k 10^k \text{ und } a_n \neq 0.$$

   Gehen Sie dazu folgendermaßen vor:

   (a) Zeigen Sie, dass zu jeder positiven reellen Zahl x eine natürliche Zahl $m \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $0 \leq x - m < 1$ gilt.

   (b) Zeigen Sie per Induktion, dass zu jedem $m \in \mathbb{N}$ ein $n \in \mathbb{N}$ und $a_0, a_1 \ldots, a_n \in \{0, 1, \ldots 9\}$, mit $a_n \neq 0$ existieren, so dass

$$m = \sum_{k=0}^{n} a_k 10^k.$$

   (c) Vollziehen Sie den Beweis in Beispiel 2.2 in Kapitel 2 des Skripts nach, um einzusehen, dass zu jeder reellen Zahl x mit $0 \leq x < 1$ eine Folge $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $b_k \in \{0, 1, \ldots 9\}$ existiert, so dass

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} b_k 10^{-k}.$$