Übungen zur Vorlesung „Analysis I“
im WiSe 2013/14 bei Prof. V. Bangert

Blatt 06 25. November 2013

Bitte geben Sie auf Ihren Lösungen die Nummer Ihrer Übungsgruppe und Ihren Namen an.

1. *(4 Punkte)* Seien $n \in \mathbb{N}$ und $k_j \in \{0,1\}$ für $j \in \mathbb{Z}$ mit $j \leq n$. Zeigen Sie, dass die Folge $(a_m)_{m\in\mathbb{N}}$, $a_m = \sum_{j=-m}^{n} k_j 2^j$, gegen eine Zahl $r \in \mathbb{R}$ konvergiert. Wir schreiben $r = (k_n \dots k_0, k_{-1}k_{-2}\dots)_2$ und nennen dies die Darstellung von r im Dualsystem. Bestimmen Sie die Darstellung von $\frac{1}{5}$ im Dualsystem.

2. Analog zur Wurzelfunktion läßt sich für $k \in \mathbb{N}$ die k-te Wurzel aus $c > 0$ mit Hilfe einer Rekursionsformel approximativ berechnen: Zu $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$, definiere
$$a_1 = c+1 \quad \text{und} \quad a_{n+1} = a_n\left(1 + \frac{c-(a_n)^k}{k(a_n)^k}\right) \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$
   (a) *(3 Punkt)* Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichungen
$$0 < a_{n+1} \leq a_n \quad \text{und} \quad (a_n)^k \geq c$$
   erfüllt sind und schließen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

   (b) *(1 Punkt)* Bezeichne a den nach (a) existierenden Grenzwert. Zeigen Sie: $a^k = c$.

   Wir betrachten nun den Fall $k = 2$. Wie im Beispiel 2.4 im Skript kann man einsehen, dass gilt:
$$0 \leq a_{n+1} - \sqrt{c} \leq \frac{1}{2\sqrt{c}} \cdot (a_n - \sqrt{c})^2.$$
   (c) *(1 Punkt)* Folgern Sie mit Hilfe vollständiger Induktion über l aus (a):
$$0 \leq a_{n+l} - \sqrt{c} \leq \left(\frac{1}{2\sqrt{c}}\right)^{(2^l-1)} (a_n - \sqrt{c})^{(2^l)}, \quad \text{für alle } n \geq 2,\ l \in \mathbb{N}.$$
   (d) *(1 Bonuspunkt)* Zeigen Sie, dass im Fall $c = 2$ die Abschätzung $0 \leq a_3 - \sqrt{2} \leq \frac{1}{10}$ erfüllt ist, und

   (e) *(1 Punkt)* bestimmen Sie mit Hilfe von (c) und (d) ein (möglichst kleines) $n \in \mathbb{N}$ mit
$$\left| a_n - \sqrt{2} \right| < 10^{-10}.$$

3. *(2 Punkte)* Beweisen Sie für $a, b > 0$ und $q, r \in \mathbb{Q}$ die Regeln:
$$(i)(a^q)^r = a^{qr} \quad (ii) a^q b^q = (ab)^q.$$

4. *(4 Punkte)*

   (a) Zeigen Sie: Für beschränkte Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt:
$$\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) \leq \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n.$$

(b) Geben Sie zwei Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ an, so dass

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n+b_n) < \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n.$$

Abgabe: Montag, 2. Dezember, bis 18 Uhr. Bitte werfen Sie Ihre Lösungen in den dafür vorgesehenen Briefkasten im Kellergeschoss der Eckerstr. 1

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt

Anwesenheitsaufgaben

1. Beweisen Sie für $a > 0$ und $q, r \in \mathbb{Q}$ die Regel

$$a^q a^r = a^{q+r}$$

2. Finden Sie den Fehler in folgende Überlegung:

   Wegen $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n}) = 1$ folgt mit Satz 1.3 (b) von Kapitel 2:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1.$$