Übungen zur Vorlesung „Analysis I“
im WiSe 2013/14 bei Prof. V. Bangert

Blatt 7 — 02. Dezember 2013

Bitte geben Sie auf Ihren Lösungen die Nummer Ihrer Übungsgruppe und Ihren Namen an.

1. *(4 Punkte)*

   (a) Sei $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$, $\inf(M) > 0$ und
   $$M' := \left\{ x \,\middle|\, \frac{1}{x} \in M \right\}.$$
   Zeigen Sie, dass $\sup(M') = \dfrac{1}{\inf(M)}$ gilt.

   (b) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die durch $b_n := -a_n$ definierte Folge. Zeigen Sie:
   $$\liminf_{n\to\infty} b_n = -\limsup_{n\to\infty} a_n.$$

2. *(4 Punkte)* Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge. Dann konvergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann mit Grenzwert in $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, wenn gilt:
   $$\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

3. *(3 Punkte)* Bestimmen Sie das Infimum und das Supremum der folgenden Mengen

   (a) Seien $a < b < c$ reelle Zahlen und $M_1 := \{x \in \mathbb{R} \mid (x-a)(x-b)(x-c) > 0\}$.

   (b) $M_2 = \{(-1)^n(1 + \frac{2}{n}) \mid n \in \mathbb{N}\}$.

   (c) $M_3 = \left\{ \frac{3}{m} - \left(\frac{1}{5}\right)^n \,\middle|\, m, n \in \mathbb{N} \right\}$.

4. *(2 Punkte)*

   (a) Seien $A \subseteq B$ Teilmengen von $\mathbb{R}$. Zeigen Sie eine der beiden folgenden Aussagen:
   $$\sup(A) \leq \sup(B), \quad \inf(A) \geq \inf(B).$$

   (b) Seien A, B Teilmengen von $\mathbb{R}$. Zeigen Sie eine der beiden folgenden Aussagen:
   $$\sup(A \cup B) = \max\{\sup(A), \sup(B)\}, \quad \inf(A \cup B) = \min\{\inf(A), \inf(B)\}.$$

5. *(3 Punkte)*

   (a) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen, so dass $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \infty$. Zeigen Sie:
   $$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \infty.$$
   Vergleichen Sie diese Aussage mit Satz 1.3(b) von Kapitel 2.

   (b) Geben sie zu jeder Zahl $q \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ an, so dass $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = q$.
   Bemerkung: Dieser Aufgabenteil zeigt, dass Satz 1.3(b) von Kapitel 2 nicht auf den Fall $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ verallgemeinert werden kann.

Abgabe: Montag, 9. Dezember, bis 18 Uhr. Bitte werfen Sie Ihre Lösungen in den dafür vorgesehenen Briefkasten im Kellergeschoss der Eckerstr. 1

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt

Anwesenheitsaufgaben

1. Sei $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$ und
$$-M := \{-x \mid x \in M\} \subseteq \mathbb{R}.$$
Zeigen Sie $\sup(-M) = -\inf(M)$.

2. Die Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ besitze ein größtes Element, genannt $\max(M)$, d.h. es gilt $\max(M) \in M$ und $x \leq \max(M)$ für alle $x \in M$. Zeigen Sie: Dann gilt $\max(M) = \sup(M)$.

3. Die „Bildmenge "einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist die Menge $M := \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$. Zeigen Sie:
Es gilt $\limsup_{n\to\infty} a_n \leq \sup(M)$.
Finden Sie außerdem eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für die $\limsup_{n\to\infty} a_n < \sup(M)$ gilt.