Übungen zur Vorlesung „Analysis I“
im WiSe 2013/14 bei Prof. V. Bangert

Blatt 8 — 09. Dezember 2013

Bitte geben Sie auf Ihren Lösungen die Nummer Ihrer Übungsgruppe und Ihren Namen an.

1. *(4 Punkte)* Skizzieren Sie folgende Teilmengen des $\mathbb{R}^2$:
   (a) $M_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |(x,y)|_\infty \leq 1\}$ (vgl. Def. von $|\cdot|_\infty$ in Anwesenheitsaufgabe 3).
   (b) $M_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |(x-1, y-1)| = 1\}$.
   (c) $M_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \leq 1\}$ (In Aufgabe 4 heißt $|x| + |y| = |(x,y)|_1$ die Summennorm von (x,y)).

2. *(6 Punkte)* Wir verwenden die Bezeichnungen aus Anwesenheitsaufgabe 2.
   (a) Zeigen Sie, dass für alle (x,y), (x',y'), $(x'',y'') \in \mathbb{R}^2$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:
      i. Genau eine der folgenden drei Aussagen ist erfüllt: $(x,y) <_L (x',y')$, $(x',y') <_L (x,y)$, $(x,y) = (x',y')$.
      ii. (*Transitivität*) Ist $(x,y) <_L (x',y')$ und $(x',y') <_L (x'',y'')$, so gilt auch $(x,y) <_L (x'',y'')$.
      iii. Ist $\lambda > 0$ und $(x,y) <_L (x',y')$, so folgt $\lambda(x,y) <_L \lambda(x',y')$.
      iv. Ist $(x,y) <_L (x',y')$, so folgt $(x,y) + (x'',y'') <_L (x',y') + (x'',y'')$.
   (b) Skizzieren Sie den Bereich $\{(x,y) \mid (0,0) <_L (x,y)\}$.
   (c) Zeigen Sie: Es existiert eine konvergente Folge (x_k, y_k) in $\mathbb{R}^2$ mit $(0,0) <_L (x_k, y_k)$, aber $\lim_{n\to\infty}(x_k, y_k) <_L (0,0)$.

3. *(2 Punkte)* Die Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $x_k \in \mathbb{R}^n$ konvergiere gegen $a \in \mathbb{R}^n$ und $b \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass $a = b$ gilt.

   Anleitung: Gehen Sie analog zum Beweis von Satz 1.1 von Kapitel 2 vor.

4. *(4 Punkte)* Die Summennorm eines Vektors $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ist
$$|x|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|.$$
   (a) Zeigen Sie, dass die Summennorm Eigenschaften (1)-(3) von Anwesenheitsaufgabe 3 erfüllt, also eine Norm ist.
   (b) Zeigen Sie für alle $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ folgende Ungleichung:
$$\frac{1}{\sqrt{n}}|x|_1 \leq |x| \leq |x|_1.$$
   Hinweis: Sie können verwenden, dass aus $(a-b)^2 \geq 0$ folgt: $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$.

Abgabe: Montag, 16. Dezember, bis 18 Uhr. Bitte werfen Sie Ihre Lösungen in den dafür vorgesehenen Briefkasten im Kellergeschoss der Eckerstr. 1

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt

Anwesenheitsaufgaben

1. Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Zahlenfolgen, für die gilt:

   (a) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

   (b) $\lim_{n\to\infty} |a_n - b_n| = 0$.

   Zeigen Sie: $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$.

2. Wir definieren die lexikografische Ordnung auf $\mathbb{R}^2$ folgendermaßen:

$$(x, y) <_L (x', y') \quad \Leftrightarrow \quad (x < x' \text{ oder } (x = x' \text{ und } y < y')).$$

   Ordnen Sie $(1, 6)$, $(-2, 7)$, $(1, 0)$, $(0, 7)$ aufsteigend an.

3. Die Maximumsnorm eines Vektors $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ist

$$|x|_\infty = \max_{i=1,2\ldots,n} |x_i|.$$

   Zeigen Sie, dass die Maximumsnorm eine Norm ist, das heißt:

   (1) $x \neq 0 \Rightarrow |x|_\infty > 0$.

   (2) $|\lambda x|_\infty = |\lambda| \cdot |x|_\infty$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$.

   (3) (*Dreiecksungleichung*) $|x + y|_\infty \leq |x|_\infty + |y|_\infty$ für alle x, $y \in \mathbb{R}$.