Übungen zur Vorlesung „Analysis I“
im WiSe 2013/14 bei Prof. V. Bangert

Blatt 9 16. Dezember 2013

Bitte geben Sie auf Ihren Lösungen die Nummer Ihrer Übungsgruppe und Ihren Namen an.

1. (a) *offenes Rechtck:* Zeigen Sie: Das kartesische Produkt $(a, b)\times(c, d) \subseteq \mathbb{R}^2$ von 2 offenen Intervallen $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ und $(c, d) \subseteq \mathbb{R}$ ist offen in $\mathbb{R}^2$.

   (b) Seien a, b, $c \in \mathbb{R}$ und $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $p(x, y) = x^3 + y^3 + ax^2y^2 + bxy^2 + cy$. Zeigen Sie: Die Nullstellenmenge $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid p(x, y) = 0\}$ von p ist abgeschlossen in $\mathbb{R}^2$.
   Bemerkung: Diese Aussage ist für alle Polynome in zwei Variablen richtig.

2. (a) Sei $r > 0$ eine reelle Zahl. Berechnen Sie alle komplexen Lösungen (in Standarddarstellung) der Gleichung
$$z^2 = -r.$$
   (b) Bestimmen Sie alle komplexen Nullstellen (in Standarddarstellung) der Polynome
$$z^2 - 2z + 6 \qquad \text{und} \qquad z^2 - (4 - i)z + 4 - 2i$$

3. Zeigen Sie: Ist $M \subseteq \mathbb{R}^n$ und $a \in \mathbb{R}^n$, so ist a genau dann Häufungspunkt von M, wenn für alle $\varepsilon > 0$ gilt:
$$B_\varepsilon(a) \cap (M \setminus \{a\}) \neq \emptyset.$$

4. Seien $k, n \in \mathbb{N}$ und $C_1, \ldots, C_k$ abgeschlossenen Teilmengen von $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass $\bigcup_{i=1}^k C_i (= C_1 \cup \cdots \cup C_k)$ abgeschlossene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist. Finden Sie eine Folge $(C_j)_{j\in\mathbb{N}}$ abgeschlossener Teilmengen $C_j \subseteq \mathbb{R}^n$, so dass $\bigcup_{i=1}^\infty C_i$ nicht abgeschlossen ist.

Abgabe: Dienstag, 7. Januar, bis 11 Uhr. Bitte werfen Sie Ihre Lösungen in den dafür vorgesehenen Briefkasten im Kellergeschoss der Eckerstr. 1

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt

Anwesenheitsaufgaben

1. (a) Berechnen Sie das multiplikative Inverse $\frac{1}{2+5i}$ von $2+5i$ in der Standarddarstellung $x+iy$ von komplexen Zahlen, d.h. berechnen Sie $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, so dass $\frac{1}{2+5i} = x+iy$ gilt.

   (b) Berechnen Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung $z^2 = i$ in der Standarddarstellung $z = x + iy$.

2. Sei $L = \{(x, y, z) \mid ax + by + cz = d\} \subseteq \mathbb{R}^3$ mit $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ eine Ebene in $\mathbb{R}^3$. Zeigen Sie: L ist eine abgeschlossene Teilmenge des $\mathbb{R}^3$.

3. Zeigen Sie, das gilt:
$$\bigcap_{n=1}^{\infty} B_{1+\frac{1}{n}}(0) = K_1(0) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}^n.$$