Übungen zur Vorlesung „Analysis I“ im WiSe 2013/14 bei Prof. V. Bangert

Blatt 10 — 20. Dezember 2013

Bitte geben Sie auf Ihren Lösungen die Nummer Ihrer Übungsgruppe und Ihren Namen an.

1. (a) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $a_n \in \mathbb{R}$ eine monoton fallende Nullfolge, und $p \in N$ mit $p \geq 2$. Zeigen Sie: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert genau dann, wenn $\sum_{k=1}^{\infty} p^k a_{p^k}$ konvergiert.

   (b) Ist $d(n)$ die Anzahl der Stellen in der Dezimaldarstellung von n, so ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{d(n)^s n}$$

   divergent für $0 \leq s \leq 1$ und konvergent für $s > 1$.

2. Welche der folgenden Reihen konvergieren?

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \qquad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \qquad (c) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n^2}$$

3. Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{4n^2 - 1}$ konvergiert und berechnen Sie den Grenzwert.

   Hinweis: Sie können zum Beispiel die ersten 5 Partialsummen bestimmen und daraus eine Vermutung für eine explizite Formel für die Partialsummen ableiten. Diese Formel müssen Sie dann mit vollständiger Induktion beweisen.

4. Für welche $z \in \mathbb{C}$ konvergieren diese Reihen?

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2} \qquad (b) \sum_{n=1}^{\infty} n! z^n$$

5. *(4 Bonuspunkte)* Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine reelle Zahlenfolge und bezeichne

$$a_k^+ := \begin{cases} a_k & \text{falls } a_k > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \qquad a_k^- := \begin{cases} a_k & \text{falls } a_k < 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

   Zeigen Sie: Ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent, aber nicht absolut konvergent, so konvergiert weder $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^+$ noch $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^-$ (d.h. es gilt $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ = +\infty$ und $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^- = -\infty$).

6. *(4 Bonuspunkte)* Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge reeller Zahlen und bezeichne $b_m := \sup\{a_n \mid n \geq m\}$ für $m \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{m\to\infty} b_m = \inf\{b_m \mid m \in \mathbb{N}\}.$$

7. *(4 Bonuspunkte)* Für eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ sei $\overline{M}$ die Menge der Punkte $x \in \mathbb{R}^n$, für die gilt: Für alle $\varepsilon > 0$ ist die Menge $B_\varepsilon(x) \cap M$ nicht leer. $\overline{M}$ heißt der topologische Abschluss von M bezüglich der euklidischen Topologie. Zeigen Sie für beliebige $M \subseteq \mathbb{R}^n$:

   (a) $\overline{M}$ ist abgeschlossen.

   (b) Ist $A \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen mit $M \subseteq A$, so gilt $\overline{M} \subseteq A$.

Abgabe: Montag, 13. Januar, bis 18 Uhr. Bitte werfen Sie Ihre Lösungen in den dafür vorgesehenen Briefkasten im Kellergeschoss der Eckerstr. 1

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt

Anwesenheitsaufgaben

1. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge reeller Zahlen. Zeigen Sie:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

2. Sei $0 \le s < 1$. Zeigen Sie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{-s} = \infty.$$

3. Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine Reihe mit $a_k \in \mathbb{C}$ und es gelte $\lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \theta \in [0, 1)$. Leiten Sie aus dem Quotientenkriterium ab, dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent ist.