Übungen zur Vorlesung „Analysis I“
im WiSe 2013/14 bei Prof. V. Bangert

Blatt 11 13. Januar 2014

Bitte geben Sie auf Ihren Lösungen die Nummer Ihrer Übungsgruppe und Ihren Namen an.

1. Skizzieren Sie den Graphen der „Größte-Ganze-Funktion“ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) := [x] := \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}.$$

   An welchen Punkten $x \in \mathbb{R}$ ist f stetig, an welchen unstetig?

2. Es seien A und B abgeschlossene Teilmengen von $\mathbb{R}$ und $f : A \cup B \to \mathbb{R}$. Die Einschränkungen $f|A : A \to \mathbb{R}$ und $f|B : B \to \mathbb{R}$ seien stetig. Zeigen Sie, dass dann auch f stetig ist.

   Gilt die Behauptung auch, wenn auf die Voraussetzung „A ist abgeschlossen“verzichtet wird?

3. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offene Menge und $\chi_U : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die Indikatorfunktion von U,

$$\chi_U(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in U \\ 0 & \text{falls } x \notin U\,. \end{cases}$$

   Zeigen Sie: χ_U ist genau an den Punkten der folgenden Menge

$$\partial U := \{x \mid x \in \mathbb{R}^n \setminus U \text{ und } x \text{ ist Häufungspunkt von } U\}$$

   unstetig.

   Hinweis: Sie können das Folgenkriterium der Stetigkeit (Satz 1.1) benutzen.

4. (a) Sei $P(z) = \sum a_k z^k$ komplexe Potenzreihe mit Konvergenzradius R. Zeigen Sie, dass

$$R = \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$$

   gilt.

   (b) Sei $P(z) = \sum a_k z^k$ komplexe Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius. Zeigen Sie: Die Funktion $P(z)$ ist an der Stelle $z = 0$ stetig.

   Hinweis: Verwenden Sie den Zusatz zu Lemma 4.2 in Fall $n = 0$.

Abgabe: Montag, 20. Januar, bis 18 Uhr. Bitte werfen Sie Ihre Lösungen in den dafür vorgesehenen Briefkasten im Kellergeschoss der Eckerstr. 1

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt

Anwesenheitsaufgaben

1. Sei $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $x_0 \in D \cap U$. Zeigen Sie:

   f ist genau dann am Punkt x_0 stetig, wenn die Restriktion $f|_{D\cap U}$ von f auf $D \cap U$ am Punkt x_0 stetig ist.

   Bemerkung: Man sagt dazu: Stetigkeit ist eine lokale Eigenschaft.

2. Skizzieren Sie den Graphen der Signumfunktion

$$\operatorname{sgn} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x > 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \\ -1 & \text{falls } x < 0\,. \end{cases}$$

   An welchen Punkten $x \in \mathbb{R}$ ist sgn stetig, an welchen unstetig?